XIX Komandinė jaunųjų matematikų olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

Kretinga, 2021-10-29

9–10 vidurinių mokyklų (1–2 gimnazijų) klasių uždaviniai ir jų sprendimai

Pastaba. Kiekvienas uždavinys vertinamas 4 taškais.

1. Raskite skaičiaus $10^{2021} + 29^{2021}$ paskutinį skaitmenį.

Sprendimas. Skaičių keliant bet kokiu laipsniu rezultato paskutinis skaitmuo priklauso nuo pradinio skaičiaus paskutinio skaitmens. 10 keliant bet kokiu laipsniu paskutinis skaitmuo bus 0. 29 keliant laipsniu rezultato paskutiniai skaitmenys gali būti tokie: 9 arba 1. Kadangi $2021 = 2 \cdot 1010 + 1$, tai skaičiaus 29^{2021} paskutinis skaitmuo bus 9. Vadinasi, skaičiaus $10^{2021} + 29^{2021}$ paskutinis skaitmuo $0 + 9 = 9$.

Atsakymas. 9.

2. Funkcija f tokia, kad su bet kokiomis teigiamomis x ir y reikšmėmis yra teisinga lygybė $f(xy) = f(x) - f(y) + 10$. Raskite $f(2021)$, jei $f\left(\frac{1}{2021}\right) = 29$.

Sprendimas. Kai $y = 1$, duotoji lygybė bus tokia: $f(x) = f(x) - f(1) + 10$, vadinasi, $f(1) = 10$.

Tegu $x = 2021$, $y = \frac{1}{2021}$. Tada $f\left(2021 \cdot \frac{1}{2021}\right) = f(2021) - f\left(\frac{1}{2021}\right) + 10$, t. y.

$$f(1) = f(2021) - 29 + 10 \quad \Rightarrow \quad 10 = f(2021) - 29 + 10 \quad \Rightarrow \quad f(2021) = 29.$$

Atsakymas. 29.

3. Triženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 2. Jeigu šį skaitmenį perkeltume į skaičiaus pradžią, tai gautas skaičius būtų 18 vienetų didesnis už pradinį skaičių. Raskite pradinį skaičių.

Sprendimas. Duotas triženklis skaičius, kuris baigiasi skaitmeniu 2: $\overline{xy2} = 100x + 10y + 2$. Perkėlus 2 į skaičiaus pradžią gaunamas toks skaičius: $\overline{2xy} = 200 + 10x + y$. Pastarasis skaičius yra 18 vienetų didesnis už pradinį skaičių, vadinasi,

$$100x + 10y + 2 = 200 + 10x + y - 18$$

$$90x + 9y = 180$$

$$9(10x + y) = 180$$

$$10x + y = 20.$$

Taigi, $x = 2$, $y = 0$, o pradinis skaičius – 202.

Atsakymas. 202.

4. Raskite a reikšmę, su kuria reiškinys

$$a-\left(\frac{(16-a)\,a}{a^2-4}+\frac{3+2a}{2-a}+\frac{3a-2}{a+2}\right):\frac{a-1}{a\,(a^2+4a+4)}$$

lygus 0.

Sprendimas. Suprastiname reiškinį:

$$a-\left(\frac{(16-a)\,a}{a^2-4}+\frac{3+2a}{2-a}+\frac{3a-2}{a+2}\right):\frac{a-1}{a\,(a^2+4a+4)}=$$

$$\begin{aligned}
&= a-\left(\frac{16a-a^2}{(a-2)\,(a+2)}-\frac{3+2a}{a-2}+\frac{3a-2}{a+2}\right)\cdot\frac{a\,(a+2)^2}{a-1}=\\
&= a-\frac{16a-a^2-3a-6-2a^2-4a+3a^2-6a-2a+4}{(a-2)\,(a+2)}\cdot\frac{a\,(a+2)^2}{a-1}=\\
&= a-\frac{a-2}{a-2}\cdot\frac{a\,(a+2)}{a-1}=a-\frac{a^2+2a}{a-1}=\frac{a^2-a-a^2-2a}{a-1}=\frac{-3a}{a-1}.
\end{aligned}$$

Randame reikšmę, su kuria reiškinys lygus 0:

$$-\frac{3a}{a-1}=0 \quad\Rightarrow\quad a=0.$$

Atsakymas. $a=0$.

5. Yra 20 pagaliukų: 4 pagaliukai – 1 cm ilgio, 4 – 2 cm ilgio, 7 – 3 cm ilgio ir 5 – 4 cm ilgio. Kaip iš tų pagaliukų sudėti didžiausio ploto stačiakampį? (Leidžiama panaudoti ne visus pagaliukus; pagaliukų laužyti negalima.)

Sprendimas. Kadangi pagaliukų laužyti negalima, tai stačiakampio kraštinės bus sveikieji skaičiai, o jo perimetras – lyginis skaičius (iš perimetro formulės $P=2(a+b)$). Kadangi visų pagaliukų ilgių bendra suma lygi $4\cdot1+4\cdot2+7\cdot3+5\cdot4=53$ cm, tai iš jų visų stačiakampio sudėti nepavyks. Natūralu atmesti vieną trumpiausią – 1 cm ilgio – pagaliuką. Tada bendras likusių pagaliukų ilgis bus 52 cm. Iš visų stačiakampių, kurių perimetras lygus 52 cm, o kraštinės – sveikieji skaičiai, didžiausią plotą turi kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 13 cm. Belieka įsitikinti, kad iš duotų skaičių įmanoma sudaryti keturias sumas po 13.

Pradedame rinkti nuo didžiausio ilgio pagaliukų – iš pradžių imame kuo daugiau 4, po to kuo daugiau 3 ir t. t.:

$$4+4+4+1=4+4+3+2=3+3+3+3+1=3+3+2+2+2+1.$$

Gavome kvadratą, kurio kraštinė – 13 cm, o plotas – 169 cm^2.

Atsakymas. Didžiausio ploto stačiakampis yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 13 cm. Jo kraštines sudaryti galima, pavyzdžiui, taip: $4+4+4+1=4+4+3+2=3+3+3+3+1=3+3+2+2+2+1$.

6. Du sportininkai bėga vienu uždaru apskritimo formos stadiono taku. Kiekvieno bėgiko greitis pastovus, bet vieno rato apibėgimui pirmasis sportininkas sugaišta 10 s mažiau negu antrasis. Jeigu jie pradės bėgti iš tos pačios vietos ta pačia kryptimi, tai dar kartą susitiks po 720 s. Kurią vieno rato dalį nubėga kiekvienas bėgikas per 1 s?

Sprendimas. Tegu pirmasis sportininkas vieno rato apibėgimui sugaišta t s. Tada antrasis tą patį kelią nubėga per $t+10$ s. Jeigu jie pradės bėgti iš tos pačios vietos ta pačia kryptimi, tai pirmasis sportininkas pavys antrąjį apibėgęs vienu ratu daugiau. Jeigu pirmasis bėgikas per 1 s nubėga $1/t$, o antrasis – $1/(t+10)$ rato dalį, tai

$$\frac{720}{t} = \frac{720}{t+10} + 1.$$

Sprendžiame gautą lygtį:

$$720t + 7200 = 720t + t^2 + 10t \;\Rightarrow\; t^2 + 10t - 7200 = 0 \;\Rightarrow$$

$$t = -90 \text{ (netinka pagal sąlygą)} \;\text{ arba }\; t = 80.$$

Taigi, pirmasis bėgikas per 1 s nubėga $\dfrac{1}{80}$, o antrasis – $\dfrac{1}{80+10} = \dfrac{1}{90}$ rato dalį.

Atsakymas. $\dfrac{1}{80}$ ir $\dfrac{1}{90}$.

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c}, \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{a}, \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = \frac{1}{b}, \end{cases}$$

kai $abc \neq 0$.

Sprendimas. Sudėję visas lygtis ir padalinę iš 2 gauname

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Iš šios lygties atimame kiekvieną sistemos lygtį:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} - \frac{1}{c}, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} - \frac{1}{a}, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} - \frac{1}{b}; \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \frac{z}{c} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2c}, \\ \frac{x}{a} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} - \frac{1}{2a}, \\ \frac{y}{b} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} - \frac{1}{2b}. \end{cases}$$

Kai $abc \neq 0$,

$$\begin{cases} z = \frac{c}{2a} + \frac{c}{2b} - \frac{1}{2}, \\ x = \frac{a}{2b} + \frac{a}{2c} - \frac{1}{2}, \\ y = \frac{b}{2a} + \frac{b}{2c} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Atsakymas. $\left(\dfrac{a}{2b} + \dfrac{a}{2c} - \dfrac{1}{2}; \dfrac{b}{2a} + \dfrac{b}{2c} - \dfrac{1}{2}; \dfrac{c}{2a} + \dfrac{c}{2b} - \dfrac{1}{2}\right)$.

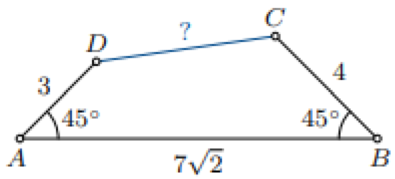
8. 9 klasės berniukų pažymių vidurkis didesnis už 10 klasės berniukų pažymių vidurkį; 9 klasės mergaičių pažymių vidurkis taip pat didesnis už 10 klasės mergaičių pažymių vidurkį. Ar gali 9 klasės mokinių pažymių vidurkis būti mažesnis už 10 klasės mokinių pažymių vidurkį? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Tarkime, kad visi mokiniai turi po lygiai pažymių. Panagrinėkime vienos klasės berniukų pažymių vidurkį ir mergaičių pažymių vidurkį. Šių dviejų skaičių vidurkis tik tada bus lygus visų klasės mokinių pažymių vidurkiui, jei berniukų ir mergaičių klasėje yra po lygiai arba berniukų ir mergaičių pažymių vidurkiai lygūs. Jei berniukų klasėje bus daug mažiau negu mergaičių, tai ir visų klasės mokinių pažymių vidurkis mažai skirsis nuo mergaičių pažymių vidurkio. Pavyzdžiui, jei klasėje vienas berniukas mokosi vien dešimtukais, o 30 mergaičių pažymių vidurkis yra 6, tai visų mokinių vidurkis lygus $(30 \cdot 6 + 10)/31 \approx 6,129$.

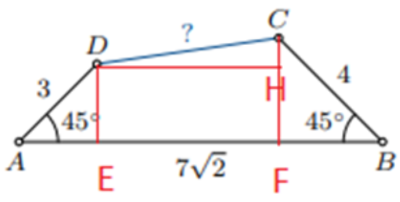
Tarkime, kad devintoje klasėje mokosi vienas berniukas, kurio pažymių vidurkis 10, ir 30 mergaičių, kurių kiekvienos pažymių vidurkis 8, o dešimtoje klasėje – 30 berniukų, kurių kiekvieno pažymių vidurkis 9, ir viena mergaitė, kurios pažymių vidurkis 6. Tada devintos klasės mokinių vidurkis lygus $(10+30\cdot 8)/31 \approx 8,065$, o dešimtos klasės mokinių vidurkis lygus $(30\cdot 9+6)/31 \approx 8,903$ ir yra didesnis už devintos klasės mokinių vidurkį.

Atsakymas. Taip, gali.

9. Duotas keturkampis $ABCD$, kuriame $\angle DAB = \angle ABC = 45°$, kraštinės $AD = 3$, $BC = 4$, $AB = 7\sqrt{2}$. Apskaičiuokite kraštinės DC ilgį.



Sprendimas. Išvedame aukštines DE ir CF. Gauti trikampiai AED ir CFB bus statieji ir lygiašoniai, todėl $DE = AE = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $CF = BF = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Galime suformuoti statųjį trikampį DHC, kuriame $DH = 7\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, o $CH = CF - FH$, $FH = DE$, todėl $CH = 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pagal Pitagoro teoremą $DC^2 = DH^2 + CH^2$. Todėl $DC = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5$.



Atsakymas. 5.

10. Keli žmonės sėdi ratu taip, kad kiekvienas turi po vieną kaimyną iš kairės ir iš dešinės. Kiekvienas iš sėdinčiųjų turi po tam tikrą skaičių monetų. Pirmasis turi viena moneta daugiau negu antrasis, antrasis – viena moneta daugiau negu trečiasis ir t. t. Pirmas iš sėdinčiųjų atiduoda vieną monetą antrajam, antrasis – dvi monetas trečiajam ir t. t. Kiekvienas kitam šalia sėdinčiam žmogui atiduoda viena moneta daugiau negu pats gauna tol, kol tai įmanoma. Žaidimo pabaigoje vienas iš sėdinčiųjų turi 4 kartus daugiau monetų negu jo kaimynas. Kiek iš viso buvo žmonių ir kiek monetų turėjo pats neturtingiausias iš jų žaidimo pradžioje?

Sprendimas. Tegu m – žmonių skaičius, k – paties neturtingiausiojo turimų monetų skaičius žaidimo pradžioje. Vadinasi, žaidimo pradžioje pirmasis dalyvis turi $k+m-1$ monetų. Po pirmo turo kiekvienas žaidimo dalyvis atiduoda po 1 monetą, o susikaupusi suma, paskutinio žaidėjo perduodama pirmajam, yra m monetų. Atitinkamai po k turų kiekvienam dalyviui lieka po k monetų mažiau, paskutinis dalyvis nebeturi nė vienos monetos, o suma, jo perduodama pirmajam žaidėjui, lygi mk monetų. Žaidimas baigiasi $k+1$ turo metu, kai "keliaujanti kasa" pasiekia paskutinį žaidėją, kuris nebeturi kuo ją papildyti. Tuo momentu "kasoje" (ir paskutinio žaidėjo rankose) bus $mk + (m-1)$ monetų, priešpaskutinis žaidėjas nebeturės nė vienos monetos, o pirmasis turės $k + m - 1 - (k + 1) = m - 2$ monetų.

Aišku, kad vienintelė žaidėjų pora, kurių žaidimo pabaigoje turimų monetų santykis būtų 4:1, yra pirmasis ir paskutinysis žaidėjai. Vadinasi,

$$mk + m - 1 = 4(m - 2) \quad \text{arba} \quad 4(mk + m - 1) = m - 2.$$

$$\begin{aligned} mk &= 3m - 7 \qquad & 4mk &= 2 - 3m \\ k &= 3 - \frac{7}{m} \qquad & k &= \frac{1}{2m} - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Akivaizdu, kad pirmoji lygybė bus teisinga (pagal sąlygą sprendiniai turi būti natūralieji skaičiai) tik tada, kai $m = 7$. Tuomet $k = 2$. Antroji lygybė sveikųjų teigiamų sprendinių neturi.

Atsakymas. 7 žmonės, 2 monetos.

Pastaba. Galimi ir kitokie uždavinių sprendimo būdai.