XIX Komandinė jaunųjų matematikų olimpiada
prof. V. Liutiko prizui laimėti

Kretinga, 2021-10-29

9–10 vidurinių mokyklų (1–2 gimnazijų) klasių uždaviniai

1. Raskite skaičiaus $10^{2021} + 29^{2021}$ paskutinį skaitmenį.

2. Funkcija f tokia, kad su bet kokiomis teigiamomis x ir y reikšmėmis yra teisinga lygybė $f(xy) = f(x) - f(y) + 10$. Raskite $f(2021)$, jei $f\left(\frac{1}{2021}\right) = 29$.

3. Triženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 2. Jeigu šį skaitmenį perkeltume į skaičiaus pradžią, tai gautas skaičius būtų 18 vienetų didesnis už pradinį skaičių. Raskite pradinį skaičių.

4. Raskite a reikšmę, su kuria duotas reiškinys lygus 0.

$$a - \left(\frac{(16-a)\,a}{a^2-4} + \frac{3+2a}{2-a} + \frac{3a-2}{a+2}\right) : \frac{a-1}{a\,(a^2+4a+4)}.$$

5. Yra 20 pagaliukų: 4 pagaliukai – 1 cm ilgio, 4 – 2 cm ilgio, 7 – 3 cm ilgio ir 5 – 4 cm ilgio. Kaip iš tų pagaliukų sudėti didžiausio ploto stačiakampį? (Leidžiama panaudoti ne visus pagaliukus; pagaliukų laužyti negalima.)

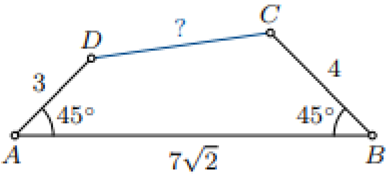
6. Du sportininkai bėga vienu uždaru apskritimo formos stadiono taku. Kiekvieno bėgiko greitis pastovus, bet vieno rato apibėgimui pirmasis sportininkas sugaišta 10 s mažiau negu antrasis. Jeigu jie pradės bėgti iš tos pačios vietos ta pačia kryptimi, tai dar kartą susitiks po 720 s. Kurią vieno rato dalį nubėga kiekvienas bėgikas per 1 s?

7. Išspręskite lygčių sistemą, kai $abc \neq 0$,

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c}, \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{a}, \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = \frac{1}{b}. \end{cases}$$

8. 9 klasės berniukų pažymių vidurkis didesnis už 10 klasės berniukų pažymių vidurkį; 9 klasės mergaičių pažymių vidurkis taip pat didesnis už 10 klasės mergaičių pažymių vidurkį. Ar gali 9 klasės mokinių pažymių vidurkis būti mažesnis už 10 klasės mokinių pažymių vidurkį? Atsakymą pagrįskite.

9. Duotas keturkampis $ABCD$, kuriame $\angle DAB = \angle ABC = 45°$, kraštinės $AD = 3$, $BC = 4$, $AB = 7\sqrt{2}$. Apskaičiuokite kraštinės DC ilgį.



10. Keli žmonės sėdi ratu taip, kad kiekvienas turi po vieną kaimyną iš kairės ir iš dešinės. Kiekvienas iš sėdinčiųjų turi po tam tikrą skaičių monetų. Pirmasis turi viena moneta daugiau negu antrasis, antrasis – viena moneta daugiau negu trečiasis ir t. t. Pirmas iš sėdinčiųjų atiduoda vieną monetą antrajam, antrasis – dvi monetas trečiajam ir t. t. Kiekvienas kitam šalia sėdinčiam žmogui atiduoda viena moneta daugiau negu pats gauna tol, kol tai įmanoma. Žaidimo pabaigoje vienas iš sėdinčiųjų turi 4 kartus daugiau monetų negu jo kaimynas. Kiek iš viso buvo žmonių ir kiek monetų turėjo pats neturtingiausias iš jų žaidimo pradžioje?