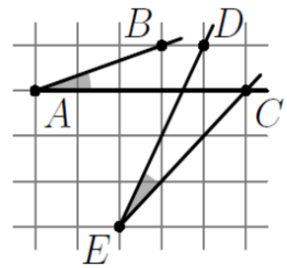
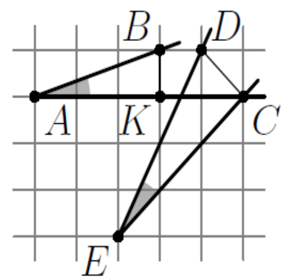
KOMANDINĖ JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ OLIMPIADA PROFESORIAUS VYTAUTO LIUTIKO PRIZUI LAIMĖTI

Kretinga
2021 spalio 29 d.

1. Palyginkite kampų BAC ir CED (žr. brėžinį) dydžius. Atsakymą pagrįskite.



Sprendimas. Tegul K – statmens, nuleisto iš taško B į kraštinę AC ir kraštinės AC susikirtimo taškas (žr. brėžinį). Trikampiai ABK ir EDC – statieji, be to šių trikampių statinių ilgių santykis yra $1:3$. O tai reiškia, kad kampų BAC ir CED tangentai yra lygūs $\frac{1}{3}$. Vadinasi, kampai BAC ir CED yra lygūs.



Atsakymas: kampai yra lygūs.

2. Raskite lygties $3x^2 + 5y^2 = 345$ sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Kadangi 345 ir $5y^2$ dalijasi iš 5, todėl x taip pat turi dalytis iš 5, arba $x = 5u$, čia u – sveikasis skaičius. Analogiškai, $y = 3v$, o v taip pat yra sveikasis skaičius. Pastarąsias išraiškas įrašę į lygtį gauname

$$3 \cdot 25u^2 + 5 \cdot 9v^2 = 345,$$

arba

$$5u^2 + 3v^2 = 23,$$

Perrinkę u ir v reikšmes gauname, kad $|u| = 2$, o $|v| = 1$. Todėl sprendiniai yra $(10, 3)$, $(10, -3)$, $(-10, 3)$ ir $(-10, -3)$.

Atsakymas: $(10, 3)$, $(10, -3)$, $(-10, 3)$, $(-10, -3)$.

3. Pirmojoje urnoje yra 2 balti rutuliai, antrojoje – 2 juodi, o trečiojoje – 1 baltas rutulys ir vienas juodas rutulys. Ant kiekvienos urnos kabėjo lentelė rodžiusi joje esančių rutulių spalvą: BB, JJ, BJ. Išdykėlis Petriukas sukeitė lenteles taip, kad dabar visos lentelės neteisingai nurodo urnoje esančiu rutulių spalvą. Iš bet kurios urnos galima ištraukti vieną rutulį. Kokio mažiausio skaičiaus traukimų reikės, kad išsiaiškintumėte visų urnų turinį.

Sprendimas. Užtenka ištraukti vieną rutulį iš urnos su lentele BJ. Jeigu jis baltas, tai šioje urnoje abu balti rutuliai, o juodieji – urnoje su lentele BB, nes jie negali būti urnoje su lentele JJ. Urnoje su lentele JJ yra skirtingų spalvų rutuliai. O jeigu iš urnos su lentele BJ ištrauktas juodas rutulys, tai šioje urnoje yra abu juodi rutuliai, urnoje su lentele JJ - abu balti rutuliai, o urnoje su lentele BB – skirtingų spalvų rutuliai.

Atsakymas: vieno traukimo.

4. Įrodykite, kad

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}}=\underbrace{33\ldots3}_{n}.$$

Įrodymas. Skaičius $\underbrace{11\ldots1}_{2n}$ pozicinėje skaičiavimo sistemoje yra užrašomas taip: $10^{2n}+10^{2n-1}+\cdots+10+1$. Šios sumos nariai sudaro geometrinę progresiją, todėl

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n}=10^{2n}+10^{2n-1}+\cdots+10+1=\frac{10^{2n}-1}{9}.$$

Analogiškai randame, kad

$$\underbrace{22\ldots2}_{n}=2\cdot10^n+2\cdot10^{n-1}+\cdots+2\cdot10+2=2(10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1)=2\cdot\frac{10^n-1}{9}.$$

Todėl

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}=\frac{10^{2n}-1}{9}-2\cdot\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^{2n}-2\cdot10^n+1}{9}=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2$$
$$=\left(3\cdot\frac{10^n-1}{9}\right)^2=(3(10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1))^2$$
$$=(3\cdot10^n+3\cdot10^{n-1}+\cdots+3\cdot10+3)^2=\left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right)^2.$$

Gautoji lygybė reiškia, kad

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}}=\underbrace{33\ldots3}_{n}.$$

Įrodyta.

5. Su kuriomis parametro a reikšmėmis kvadratinės lygties

$$x^2+(a-1)x-2a=0$$

šaknų kvadratų suma yra lygi 9?

Sprendimas. Tarkime, kad kvadratinės lygties šaknys yra x_1 ir x_2. Pritaikę Vijeto teoremą gauname, kad

$$\begin{cases} x_1+x_2 &= 1-a,\\ x_1\cdot x_2 &= -2a,\\ x_1^2+x_2^2 &= 9.\end{cases}$$

Kadangi $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, todėl $(1-a)^2+4=9$. Atlikę veiksmus parametro a atžvilgiu gauname kvadratinę lygtį $a^2+2a-8=0$, kurios šaknys yra $a_1=2$, $a_2=-4$. Tačiau uždavinio sąlygą tenkina tik $a=2$, nes su $a=-4$ sąlygoje duotos kvadratinės lygties diskriminantas yra neigiamas.

Atsakymas: $a=2$.

6. McDonald's kavinėje užimta ne mažiau kaip 93,5% ir ne daugiau kaip 94,5% staliukų. Koks mažiausias staliukų skaičius yra šioje kavinėje?

Sprendimas. Iš sąlygos matome, kad kavinėje yra mažiausiai 1 laisvas staliukas. Kadangi laisvų staliukų yra ne daugiau kaip 6,5% nuo visų kavinės staliukų, tai kavinėje iš viso yra ne mažiau kaip $1:0,065=15\frac{5}{13}$ staliukų, t. y. ne mažiau kaip 16 staliukų. Taigi, mažiausias galimas staliukų skaičius kavinėje yra 16: 15 užimta ir 1 laisvas.

Atsakymas: 16 staliukų.

7. Iš miesto A į miestą B išvyko pirmasis automobilis. Tuo pačiu metu iš miesto B į miestą A išvyko antrasis automobilis. Pirmasis automobilis į miestą B atvyko po 2,5 val. po susitikimo su antruoju automobiliu, o antrasis automobilis atvyko į miestą A po 1,6 val. po susitikimo su pirmuoju automobiliu. Kiek valandų kelionėje užtruko kiekvienas automobilis?

Sprendimas: Tegul pirmojo automobilio greitis yra x km/h, o antrojo – y km/h. Tuomet $1,6y$ km yra pirmojo automobilio nuvažiuotas kelias iki susitikimo, o $2,5x$ km – antrojo automobilio nuvažiuotas kelias iki susitikimo. Iš čia gauname, kad atstumas tarp miestų $2,5x+1,6y$ km. Kadangi tolygiai judančių kūnų nueitas kelias per tą patį laiką yra proporcingas jų greičiui, todėl gauname, kad

$$\frac{1,6y}{2,5x} = \frac{x}{y}.$$

Iš čia randame, kad

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{16}{25}, \quad \text{arba} \quad \frac{x}{y} = \frac{4}{5}.$$

Todėl pirmojo automobilio kelyje sugaištas laikas yra

$$\frac{2,5x+1,6y}{x} = 2,5 + 1,6\frac{y}{x} = 2,5 + 1,6\cdot\frac{5}{4} = 4,5,$$

o antrojo –

$$\frac{2,5x+1,6y}{y} = 2,5\frac{x}{y} + 1,6 = 2,5\cdot\frac{4}{5} + 1,6 = 3,6.$$

Atsakymas: 4,5 h ir 3,6 h.

8. Išspręskite nelygybę

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(x+2)}{x}.$$

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis yra sudaryta iš visų x, su kurias $x > -2$, $x \neq -0,5$ ir $x \neq 0$. Vadinasi apibrėžimo sritis yra sudaryta iš 3 intervalų:

$$-2 < x < -0,5, \qquad -0,5 < x < 0, \qquad 0 < x < \infty.$$

Kai $-2 < x < -0,5$ arba $-0,5 < x < 0$, duotoji nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$\log_2(x+2) > \frac{4x-1}{2x+1}, \tag{1}$$

o kai $0 < x < \infty$ –

$$\log_2(x+2) < \frac{4x-1}{2x+1}. \tag{2}$$

1. Tarkime, kad $-2 < x < -0,5$. Tuomet(1) nelygybės kairioji pusė $\log_2(x+2) < \log_2\frac{3}{2} < 1$, o dešinioji pusė $\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} > 2$. Vadinasi šiuo atveju nelygybė sprendinių neturi.

2. Tarkime, kad $-0,5 < x < 0$. Tuomet(1) nelygybės kairioji pusė $\log_2(x+2) > \log_2\frac{3}{2} > 0$, o dešinioji pusė neigiama (skaitiklis neigiamas, o vardiklis teigiamas). Vadinasi šiuo atveju tinka visos x-ų reikšmės.

3. Tarkime, kad $0 < x < \infty$. Šiame intervale (2) nelygybės kairioji pusė $\log_2(x+2) > \log_2 2 > 1$, o dešinioji pusė – $\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2$. Akivaizdu, kad nelygybė neturės sprendinių, kai kairioji pusė $\log_2(x+2) \geqslant 2$, t. y., kai $x \geqslant 2$. Analogiškai, nelygybė neturės sprendinių, kai jos dešinioji pusė $\frac{4x-1}{2x+1} \leqslant 1$, arba $\frac{2(x-1)}{2x+1} \leqslant 0$, t. y., kai $-0,5 < x \leqslant 1$. Įvertinę, kad nagrinėjamu atveju $x > 0$, gauname, kad nelygybė neturi sprendinių, kai $0 < x \leqslant 1$. Lieka rasti (2) nelygybės sprendinius, kai $1 < x < 2$. Šiame intervale $\log_2(x+2) > \log_2 3$, o $2 - \frac{3}{2x+1} < \frac{7}{5}$. Parodysime, kad $\log_2 3 > \frac{7}{5}$. Kadangi $243 > 128$, t. y $3^5 > 2^7$, todėl $3 > 2^{\frac{7}{5}}$, arba $\log_2 3 > \frac{7}{5}$. Vadinasi ir šiame intervale nelygybė neturi sprendinių.

Atsakymas: $-0,5 < x < 0$

9. Šachmatų turnyre dalyvavo 2 moksleiviai iš III klasės ir keletas IV klasės moksleivių. Kiekvienas turnyro dalyvis sužaidė su kitu turnyro dalyviu lygiai vieną kartą. III klasės moksleiviai kartu surinko 8 taškus, o visi IV klasės moksleiviai surinko po lygiai taškų. Kiek IV klasės moksleivių dalyvavo turnyre? (Už pergalę skiriamas 1 taškas, už lygiąsias – 1/2 taško, o už pralaimėjimą – 0 taškų)

Sprendimas. IV klasės moksleivių dalyvavusių šachmatų turnyre skaičių pažymėkime n, o kiekvieno jų surinktų taškų skaičių pažymėkime m. Tuomet turnyre buvo surinkta iš viso $mn + 8$ taškų. Iš kitos pusės $n + 2$ dalyviai surinks tiek pat taškų, kiek sužais partijų, t. y. $C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Vadinasi,

$$mn + 8 = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

arba

$$2mn + 16 = n^2 + 3n + 2.$$

Sugrupavę gauname, kad

$$n^2 + 3n - 2mn = 14$$

arba

$$n(n + 3 - 2m) = 14.$$

Kadangi n ir m yra natūralieji skaičiai, todėl $n = 1$, arba $n = 2$, arba $n = 7$, arba $n = 14$. Tačiau $n = 1$ ir $n = 2$ būti negali, nes tuomet III klasės moksleiviai nesurinks 8 taškus.

Atsakymas: 7 arba 14.

10. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + |z-6| + 4 & = \frac{4x}{y}, \\ x + y + z & = 0. \end{cases}$$

Sprendimas. Pertvarkę pirmąją sistemos lygtį gauname

$$\frac{x^2}{y^2} - 4\frac{x}{y} + 4 + |z-6| = 0,$$

arba

$$\left(\frac{x}{y} - 2\right)^2 + |z-6| = 0.$$

Dviejų neneigiamų dydžių suma lygi nuliui tik tada, kada abu dydžiai yra lygūs nuliui. Todėl $x = 2y$, o $z = 6$. Gautąsias išraiškas įrašę į antrąją sistemos lygtį gauname, kad $y = -2$. Tuomet $x = -4$.

Atsakymas: $x = -4$, $y = -2$, $z = 6$.