XV Jaunųjų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

VšĮ Pranciškonų gimnazija,
Kretinga, 2016-11-04

11–12 vidurinių mokyklų (3–4 gimnazijų) klasių uždaviniai ir jų sprendimai

1. Raskite visus sveikųjų skaičių ketvertus (x, y, z, t) tokius, kad jų suma būtų lygi 0, o skaičius $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ būtų sveikojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas.

Kadangi $x + y + z + t = 0$, lygybę galima užrašyti $x + y = -(z + t)$. Abi jos puses pakėlę kvadratu gauname

$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2zt + t^2.$$

Iš čia

$$x^2 + y^2 - z^2 - t^2 \;\; = \;\; 2(zt - xy).$$

Dar kartą keliame kvadratu abi lygybės puses

$$(x^2 + y^2 - z^2 - t^2)^2 \;\; = \;\; 4(zt - xy)^2.$$

Atskliaudę gauname

$$B - 2A = -8xyzt$$

ir

$$4xyzt = A - \frac{B}{2};$$

čia $A = x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2$ ir $B = x^4 + y^4 + z^4 + t^4$. Pastebėkime, kad abiejose lygybės pusėse turi būti lyginiai skaičiai. Todėl

$$\begin{aligned} 2N &= 2(x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt) = \\ &= 2\big(B + \big(A - \frac{B}{2}\big)\big) = \\ &= B + 2A = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2. \end{aligned}$$

Jeigu $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \neq 0$, tai skaičiaus N skaidinyje pirminiais daugikliais dvejetas įeina nelyginiu laipsniu. Vadinasi, N nėra jokio skaičiaus kvadratas. Todėl $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$. Iš čia gauname sprendinį $x = y = z = t = 0$.

Pastaba. Gali būti kitų sprendimo būdų.

Atsakymas. $x = y = z = t = 0$.

2. Tiksliųjų mokslų mokykloje visi mokiniai suoluose sėdi po du. Žinoma, kad 60 % berniukų suolo kaimynas yra berniukas, o 20 % mergaičių – mergaitė. Kokią dalį visų mokyklos mokinių sudaro mergaitės? Atsakymą pagrįskite.

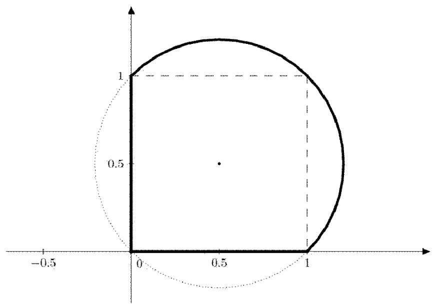
Sprendimas.
Iš sąlygos matome, kad 40 % berniukų sėdi su mergaitėmis, o 80 % mergaičių – su berniukais. Tada 40 % berniukų skaičius sudaro 80 % visų mergaičių, t. y. mergaičių dvigubai mažiau nei berniukų. Vadinasi, mergaitės sudaro $\frac{1}{3}$ visų mokinių.

Atsakymas. $\frac{1}{3}$.

3. Raskite kreive $x^2+y^2 < |x|+|y|$ apribotos figūros plotą. Paaiškinkite sprendimą.

Sprendimas.
Duotąją nelygybę galima užrašyti $x^2 - |x| + y^2 - |y| < 0$. Išskyrę x ir y atžvilgiu pilnus kvadratus, gauname

$$\left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(|y| - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$



Pastebėkime, kad figūra yra simetriška pirmo ketvirčio pusiaukampinės atžvilgiu. Pakanka nagrinėti tik aibę taškų, kurie priklauso pirmajam ketvirčiui. Vadinasi, duotąją nelygybę galime užrašyti taip:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Taškai, kurie tenkina pastarąją nelygybę, priklauso skritulio su centru taške $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ir spinduliu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ vidui. Tačiau imame tik tą skritulio dalį, kuri priklauso pirmam ketvirčiui.

Nuopjovų plotai yra vienodi. Vienos iš jų plotą pažymėkime s. Jei iš skritulio išpjautume vienetinį kvadratą su viršūnėmis taškuose $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$, tai liktų keturios to paties ploto s nuopjovos. Skritulio plotas S_{skr} yra $S_{\text{skr}} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} = 1 + 4s$. Iš čia $s = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. Todėl ieškomos figūros plotas yra $\frac{\pi}{2} - 2s = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Pavaizdavus duotąją figūrą koordinačių plokštumoje, gausime figūrą, kurios plotas keturis kartus didesnis, t. y. $4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = 2 + \pi$.

Atsakymas. $2 + \pi$.

4. Prekybos centre parduodami dviejų tipų vaisių rinkiniai. Pirmajame rinkinyje yra 2 obuoliai ir 7 apelsinai, o kainuoja 3 eurus. Antrajame yra 5 obuoliai ir 4 apelsinai, o kaina – 2 eurai. Jurgis nori nusipirkti vienodą kiekį apelsinų ir obuolių. Kokią mažiausią pinigų sumą jam reikės išleisti, jei nepirkti negali? Vaisiai parduodami tik rinkiniais, plėšyti pakuočių negalima. Paaiškinkite sprendimą.

Sprendimas.
Sakykime, kad Jurgis nusipirko a pirmojo tipo rinkinių ir b – antrojo. Vadinasi, obuolių nusipirko $2a + 5b$, o apelsinų – $7a + 4b$. Kadangi obuolių ir apelsinų turi būti vienodai,

tai $2a + 5b = 7a + 4b$. Iš čia gauname, kad skaičiai a ir b turi tenkinti santykį $5a = b$. Kadangi a ir b gali būti tik natūralieji skaičiai, o 5 ir 1 yra tarpusavyje pirminiai, tai $a = k$, o $b = 5k$; čia k – natūralusis skaičius. Todėl Jurgis sumokėjo $3 \cdot k + 2 \cdot 5k = 13k$ eurų. Mažiausia pinigų suma bus, kai $k = 1$, t. y. 13 eurų.

Atsakymas. Mažiausia pinigų suma yra 13 eurų.

5. Nagrinėkime kvadratines funkcijas $y = x^2 + px + q$, kurioms $p + q = 2016$. Įrodykite, kad parabolės, kurios yra šios funkcijos grafikai, kertasi viename taške.

Sprendimas.

Parinkime tokią x reikšmę, kad reiškinys $p + q$ būtų susijęs su kvadratine funkcija $y = x^2 + px + q$ taške x. Sakykime, $x = 1$. Tada $y(1) = 1 + p + q = 1 + 2016 = 2017$. Iš čia visoms kvadratinėms funkcijoms $f(1) = 2017$. Bet tai reiškia, kad kiekvienos kvadratinės funkcijos grafikas eina per plokštumos tašką $(1; 2017)$.

6. Kiek yra keturženklių skaičių, kurių skaitmenų sandauga lygi 60?

Sprendimas.

Išskaidykime 60 pirminiais daugikliais, t. y. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Vadinasi, nagrinėjant sandaugą, tinka tik skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5 ir 6. Sandauga lygi 60, kai turime rinkinius (1, 2, 5, 6), (1, 3, 4, 5) ir (2, 2, 3, 5). Jei visi skaitmenys yra skirtingi, tokių kombinacijų yra po 24 . Jei nagrinėjame kombinaciją su dviem pasikartojančiais skaitmenimis, jų bus 12. Todėl iš viso yra $24 + 24 + 12 = 60$.

Atsakymas. 60.

7. Tadas turi keistą įprotį: kai užduodami klausimai apie mėgstamiausią skaičių, jis tik į kas antrą atsako teisingai. Berniuko pirmasis atsakymas yra arba tiesa, arba melas. Tadui klasės draugas Simas uždavė šiuos klausimus:

– ar skaičius yra mažesnis už 100?
– ar skaičius yra pirminis?
– ar skaičiaus išraiškoje yra skaitmuo 4?
– ar skaičius yra lyginis?
– ar skaičius yra kvadratas?

Į visus klausimus berniukas atsakė „taip“. Koks yra Tado mėgstamiausias skaičius?

Sprendimas.

Pastebėkime, kad pirmasis Tado atsakymas turėtų būti tiesa. Jei ne, tada antrasis ir ketvirtasis atsakymai turi būti teisingi, iš kurių seka, kad 2 turėtų būti jo mėgstamiausias skaičius (vienintelis lyginis pirminis). Bet tada jo pirmasis atsakymas nebūtų melas, o tai – prieštara. Tai reiškia, kad Tado mėgstamiausias skaičius yra mažesnis už 100, kvadratas, nelyginis (nes atsakymas į ketvirtą klausimą – melas) ir išraiškoje turintis skaitmenį 4. Visi kvadratai mažesni už 100 yra 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Iš jų vienintelis 49 yra nelyginis, o jo išraiškoje yra skaitmuo 4.

Atsakymas. 49.

8. Duota aritmetinė funkcija $f(m + n) = f(m) + f(n) + mn$; čia m ir n yra natūralieji skaičiai. Žinoma, kad $f(1) = 3$. Apskaičiuokite $f(13)$.

Sprendimas.

Sakykime, kad $m = 1$. Tada

$$f(1 + n) = f(1) + f(n) + n = f(n) + n + 3.$$

Todėl

$$f(13) = f(12)+15 = f(11)+15+14 = \ldots = f(1)+15+14+\ldots+4 = 3+4+\ldots+15 = 117.$$

Pritaikę indukcijos metodą, gauname, kad $f(n) = \frac{n(n+5)}{2}$ (pastaroji išraiška tenkina duotąją funkcinę lygtį).

Atsakymas. $f(13) = 117$.

9. Įrodykite, kad $\log_2 3$ yra iracionalusis skaičius.

Priminsime, kad skaičius vadinamas racionaliuoju, jeigu jį galima užrašyti dviejų skaičių a ir b santykiu arba trupmena $\frac{a}{b}$; čia a yra bet koks sveikasis skaičius, o b yra natūralusis skaičius. Jeigu realusis skaičius nėra racionalusis, jis vadinamas iracionaliuoju.

Sprendimas.

Įrodysime prieštaros būdu.

Sakykime, kad $\log_2 3$ yra racionalusis skaičius. Tada egzistuoja sveikieji skaičiai p ir q tokie, kad $\log_2 3 = \frac{p}{q}$. Kadangi $\log_2 3$ yra teigiamas skaičius, tai galime reikalauti, kad p ir q taip pat būtų teigiami. Antilogaritmuodami abi lygybės puses, gauname

$$2^{\log_2 3} = 2^{\frac{p}{q}}.$$

Iš čia

$$3 = 2^{\frac{p}{q}}.$$

Abi lygybės puses pakėlę laipsniu q, gauname

$$3^q = 2^p.$$

Tačiau 3^q yra sveikasis skaičius, kuris nėra dalus iš 2. Taip pat jis nėra dalus iš 2 bet kuriuo laipsniu. Vadinasi, lygybė $3^q = 2^p$ negalima. Gauta prieštara parodo, kad skaičius $\log_2 3$ yra iracionalusis.

10. Realiųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yra sudaroma pagal tokią taisyklę: $a_1 = 2$, $a_2 = 12$ ir

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_{n-1}}, \quad n > 1.$$

Apskaičiuokite a_{2016}.

Sprendimas.

Apskaičiuokime keletą pirmųjų sekos narių: $a_3 = \frac{13}{2}$, $a_4 = \frac{5}{8}$, $a_5 = \frac{1}{4}$, $a_6 = 2$, $a_7 = 12$, $a_8 = \frac{13}{2}$, $a_9 = \frac{5}{8}$ ir t. t. Matome, kad seka yra periodinė su periodu 5. Vadinasi, $a_{2016} = a_1 = 2$.

Atsakymas. $a_{2016} = 2$.

Pastaba. Kiekvienas uždavinys vertinamas 4 taškais.

Vertinimo komisijos pirmininkė
prof. dr. Roma Kačinskaitė