XV Jaunųjų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

VšĮ Pranciškonų gimnazija,
Kretinga, 2016-11-04

9–10 vidurinių mokyklų (1–2 gimnazijų) klasių uždaviniai ir jų sprendimai

1. Raskite visus dviženklius skaičius, kurių suma su skaičiumi, užrašytu tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, yra natūraliojo skaičiaus n kvadratas.

Sprendimas. Ieškomą skaičių pažymėkime $\overline{ab}$. Tada

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11\,(a + b) = n^2.$$

Tai rodo, kad n dalus iš 11. Vadinasi, skaičius $11\,(a+b)$ yra dalus iš 121. Tai reiškia, kad $a+b$ yra dalus iš 11. Kadangi a ir b yra skaitmenys, tai $a+b=11$. Tinka visi tokie skaičiai, kurių skaitmenų suma lygi 11, t. y. 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Atsakymas. $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92$.

2. Išspręskite lygtį

$$\left(\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35}\right)\cdot 2,8 + 1,75\right) : 0,05 = 235.$$

Sprendimas.

$$\left(\left(\frac{45}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35}\right)\cdot 2,8 + 1,75\right) : 0,05 = 235,$$

$$\left(\frac{45\cdot 0,35 - 7\cdot(0,75x - 2)}{7\cdot 0,35}\cdot 2,8 + 1,75\right) : 0,05 = 235,$$

$$\left(\frac{83,3 - 14,7x}{2,45} + 1,75\right) : 0,05 = 235,$$

$$\frac{87,5875 - 14,7x}{2,45} : 0,05 = 235,$$

$$\frac{87,5875 - 14,7x}{2,45} = 235\cdot 0,05,$$

$$87,5875 - 14,7x = 28,7875,$$

$$-14,7x = -58,8,$$

$$x = 4.$$

Atsakymas. 4.

Pastaba. Galimi ir kiti sprendimo būdai.

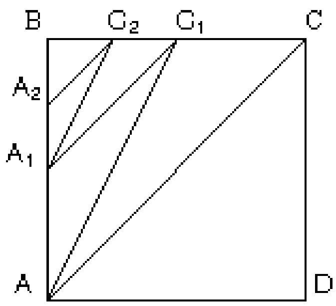
3. Prekybos centre parduodami dviejų tipų vaisių rinkiniai. Pirmasis rinkinys, kuriame yra 2 obuoliai ir 7 apelsinai, kainuoja 3 eurus. Antrajame rinkinyje yra 5 obuoliai ir 4 apelsinai, o kaina – 2 eurai. Jurgis nori nusipirkti vienodą kiekį apelsinų ir obuolių. Kokią mažiausią pinigų sumą jam reikės išleisti, jei nepirkti negali? Vaisiai parduodami tik rinkiniais, plėšyti pakuočių negalima. Paaiškinkite sprendimą.

Sprendimas. Sakykime, kad Jurgis nusipirko a pirmojo tipo rinkinių ir b – antrojo. Vadinasi, obuolių nusipirko $2a + 5b$, o apelsinų – $7a + 4b$. Kadangi obuolių ir apelsinų turi būti vienodai, tai $2a+5b = 7a+4b$. Iš čia gauname, kad skaičiai a ir b turi tenkinti santykį $5a = b$. Kadangi a ir b gali būti tik natūralieji skaičiai, o 5 ir 1 yra tarpusavyje pirminiai, tai $a = k$, o $b = 5k$; čia k – natūralusis skaičius. Todėl Jurgis sumokėjo $3 \cdot k + 2 \cdot 5k = 13k$ eurų. Mažiausia pinigų suma bus, kai $k = 1$, t. y. 13 eurų.

Atsakymas. Mažiausia pinigų suma yra 13 eurų.

4. Kvadrato $ABCD$, kurio kraštinės ilgis lygus 1 m, viršūnė A sujungta su viršūne C ir su kraštinės BC vidurio tašku C_1. Kraštinės AB vidurio taškas A_1 sujungtas su tašku C_1 ir su C_1B vidurio tašku C_2. Kraštinės A_1B vidurio taškas A_2 sujungtas su tašku C_2 ir su C_2B vidurio tašku C_3 ir t. t. Apskaičiuokite trikampių AA_1C_1, $A_1A_2C_2$ ir $A_5A_6C_6$ plotus.

Sprendimas.



Trikampio AA_1C_1 kraštinė AA_1 lygi pusei kvadrato kraštinės AB ilgio. Į kraštinę AA_1 nuleista aukštinė $BC_1 = \frac{1}{2}BC$. Taigi

$$S_{AA_1C_1} = \frac{1}{2}AA_1 \cdot BC_1 = \frac{1}{2^3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Pagal trikampių panašumą ($\triangle A_1A_2C_2 \sim \triangle AA_1C_1$, nes atitinkamų kraštinių proporcingumo koeficientas $k = \frac{1}{2}$, todėl $\frac{S_{A_1A_2C_2}}{S_{AA_1C_1}} = \frac{1}{4}$. Atitinkamai ir su kitais trikampiais.)

$$S_{A_1A_2C_2} = \frac{1}{4}S_{AA_1C_1} = \frac{1}{2^5} \text{ (m}^2\text{)};$$

$$S_{A_5A_6C_6} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot S_{A_1A_2C_2} = \frac{1}{2^{13}} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Atsakymas. $S_{AA_1C_1} = \frac{1}{2^3}\text{m}^2, S_{A_1A_2C_2} = \frac{1}{2^5}\text{m}^2, S_{A_5A_6C_6} = \frac{1}{2^{13}}\text{m}^2.$

5. Raskite skaičiaus $11^{2016} + 4^{2016}$ paskutinį skaitmenį.

Sprendimas. Skaičių keliant bet kokiu laipsniu, rezultato paskutinis skaitmuo priklauso nuo pradinio skaičiaus paskutinio skaitmens. 11 keliant bet kokiu laipsniu paskutinis skaitmuo bus 1. Keliant 4 laipsniu rezultato paskutiniai skaitmenys gali būti du: 4 arba 6. Kadangi $2016 = 2 \cdot 1008$, tai skaičiaus 4^{2016} paskutinis skaitmuo yra 6. Vadinasi, skaičiaus $11^{2016} + 4^{2016}$ paskutinis skaitmuo yra $1 + 6 = 7$.

Atsakymas. 7.

6. Ar galima, naudojantis skriestuvu ir liniuote, nubrėžti stačiakampį, kurio perimetras yra 14 cm, o įstrižainė – 5 cm ilgio? Jei galima, kam lygios tokio stačiakampio kraštinės?

Sprendimas. Tarkime, stačiakampio kraštinės a ir b. Duotas stačiakampio perimetras $P = 2(a + b) = 14$ cm ir įstrižainė $c = 5$ cm. Tada

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ a^2 + b^2 = 25. \end{cases}$$

Iš čia

$$a = 7 - b,$$

$$(7 - b)^2 + b^2 = 25,$$

$$b^2 - 7b + 12 = 0.$$

Išsprendę kvadratinę lygtį gauname $b_1 = 3$ (cm); $b_2 = 4$ (cm). Tada $a_1 = 4$ (cm); $a_2 = 3$ (cm).

Atsakymas. Galima. Stačiakampio kraštinės lygios 3 cm ir 4 cm.

7. Iš trupmenos $\frac{a}{b}$ galima gauti bet kurią iš trijų trupmenų $\frac{a+b}{b}$, $\frac{a-b}{b}$ ir $\frac{b}{a}$. Kaip tokiu būdu galima iš $\frac{1}{2}$ gauti $\frac{24}{67}$? Pastaba: nebūtina panaudoti visas trupmenų formas.

Sprendimas.

$$\frac{1}{2} \to \frac{2}{1} \to \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1} \to \frac{3+1}{1} = \frac{4}{1} \to \frac{1}{4} \to \frac{1+4}{4} = \frac{5}{4} \to \frac{4}{5} \to \frac{4+5}{5} = \frac{9}{5} \to$$

$$\to \frac{9+5}{5} = \frac{14}{5} \to \frac{14+5}{5} = \frac{19}{5} \to \frac{5}{19} \to \frac{5+19}{19} = \frac{24}{19} \to \frac{19}{24} \to \frac{19+24}{24} = \frac{43}{24} \to$$

$$\to \frac{43+24}{24} = \frac{67}{24} \to \frac{24}{67}.$$

Pastaba. Galimi ir kitokie sprendimo būdai.

8. Dviejų motorlaivių greitis stovinčiame vandenyje yra vienodas. Dviejose upėse su skirtingais srovių greičiais jie nuplaukė vienodus atstumus pasroviui, o po to apsisukę plaukė atgal, prieš srovę. Kurio motorlaivio kelionė bus trumpesnė?

Sprendimas. Pažymėkime v – motorlaivių greitį stovinčiame vandenyje, s – atstumą upe viena kryptimi, x – pirmos upės srovės greitį, y – antros upės srovės greitį. Tada pirmasis motorlaivis kelionėje užtruks

$$\frac{s}{v-x} + \frac{s}{v+x} = \frac{2sv}{v^2-x^2}$$

valandų, o antrasis

$$\frac{2sv}{v^2-y^2}.$$

Jei $x > y$, tada $v^2 - x^2 < v^2 - y^2$. Vadinasi,

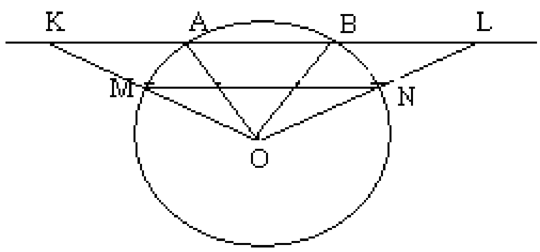
$$\frac{2sv}{v^2-x^2} > \frac{2sv}{v^2-y^2}.$$

Taigi, trumpiau šioje kelionėje užtruks motorlaivis, plaukiantis upėje, kurios srovės greitis mažesnis.

Atsakymas. Trumpesnė kelionė bus motorlaivio, plaukiančio upėje, kurios srovės greitis mažesnis.

9. Duotas apskritimas, kuriame nubrėžti du spinduliai. Nubrėžkite apskritimo stygą, kurią šie spinduliai dalija į 3 lygias dalis.

Sprendimas.



Spręsdami šį uždavinį naudosimės trikampių panašumu.

Duoti spinduliai yra OA ir OB. Tiesėje AB atidedame taškus K ir L taip, kad $KA = AB = BL$. Sujunkime taškus K ir L su O. KO ir LO kirtimosi su apskritimu taškai M, N ir yra ieškomos stygos galų taškai (pagal trikampių panašumą: $\triangle MNO \sim \triangle KLO$, nes $MN \parallel KL$, vadinasi, ir atitinkami trikampių kampai yra lygūs).

Atsakymas. Stygą MN spinduliai OA ir OB dalija į 3 lygias dalis.

10. Karolis dabar turi du kartus daugiau metų negu Romui buvo tada, kai Karoliui buvo tiek metų, kiek Romui yra dabar. Kai Romui bus tiek metų, kiek Karoliui yra dabar, tada abiems kartu bus 54 metai. Kiek metų dabar yra Karoliui, o kiek Romui?

Sprendimas. Jei Karoliui yra x metų, o Romui y metų, tada prieš $x - y$ metų Karoliui buvo y metų, o Romui $2y - x$ metų. Vadinasi,

$$x = 2(2y - x).$$

Po $x - y$ metų Karoliui bus $2x - y$, o Romui x metų. Todėl

$$2x - y + x = 54.$$

Sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} x = 2(2y - x), \\ 2x - y + x = 54. \end{cases}$$

Ją išsprendę gauname, kad $x = 24$, o $y = 18$.

Atsakymas. Karoliui 24 metai, Romui 18 metų.

Pastaba. Kiekvienas uždavinys vertinamas 4 taškais.

Vertinimo komisijos narė
lekt. dr. Karolina Piaseckienė