XIII Jaunųjų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

Kretingos Jurgio Pabrėžos universitetinė gimnazija,
Kretinga, 2014-10-30

Uždaviniai ir jų sprendimai

1. Išspręskite parametrinę nelygybę $\sqrt{x+2} > a+1$. (4 balai)

Sprendimas. Jei $a < -1$, tai $x \geq -2$.

Jei $a = -1$, tai $x > -2$.

Jei $a > -1$, tai $\sqrt{x+2} > a+1$, t. y.

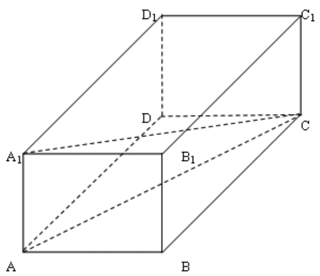
$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ a > -1, \\ x+2 > (a+1)^2 \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ a > -1, \\ x > (a+1)^2 - 2. \end{cases}$$

Srendinys – visi $x > (a+1)^2 - 2$.

Atsakymas. $x \in [-2; \infty)$, kai $a \in (-\infty; -1]$, ir $x \in ((a+1)^2 - 2; \infty)$, kai $a \in (-1; \infty)$.

2. Raskite stačiakampio gretasienio tūrį, jei jo įstrižainė lygi d, o briaunų santykis yra $m : n : p$. (4 balai)

Sprendimas. Tarkime, kad briaunos yra: $AD = mx$, $CD = nx$, $AA_1 = px$. Pagal



uždavinio sąlygą $(m^2 + n^2 + p^2)x^2 = d^2$. Iš čia

$$x = \frac{d}{(m^2 + n^2 + p^2)^{1/2}}.$$

Todėl tūris

$$V = mnpx^3 = \frac{mnpd^3}{(m^2 + n^2 + p^2)^{3/2}}.$$

Atsakymas. $\frac{mnpd^3}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$.

3. Apskaičiuokite $\frac{a+b}{a-b}$, jei žinoma, kad $a < b < 0$ ir $a^2 + b^2 = 4ab$. (3 balai)

Sprendimas. Kadangi $a^2 + b^2 = 4ab$, tai $(a+b)^2 = 6ab$ ir $a + b = -\sqrt{6ab}$, nes $a < b < 0$. Panašiai gauname, kad $a - b = -\sqrt{2ab}$. Vadinasi,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{-\sqrt{6ab}}{-\sqrt{2ab}} = \sqrt{3}.$$

Atsakymas. $\sqrt{3}$.

4. Natūralieji skaičiai x ir y tenkina lygybę $2^5 \cdot x^y = \overline{25xy}$. Raskite juos. (4 balai)

Sprendimas. Kadangi 2^5 yra lyginis skaičius, tai $\overline{25xy}$ taip pat yra lyginis. Todėl y gali įgyti tik reikšmes 2, 4, 6, 8.

Kai $y = 2$, galime išskirti du atvejus: $x < 9$ ir $x = 9$. Jei $x < 9$, tai $2^5 \cdot x^2 \leq 2^5 \cdot 8^2 = 2048$ (netinka). Jei $x = 9$, tai $2^5 \cdot x^2 = 2^5 \cdot 9^2 = 2592$. Vadinasi, $x = 9$ ir $y = 2$ tenkina uždavinio sąlygą.

Išnagrinėję atvejus $y = 4, 6, 8$, matome, kad daugiau nėra tokių x, kurie tenkintų uždavinio sąlygą.

Atsakymas. $x = 9$, $y = 2$.

5. Lobių ieškotojai rado auksinių monetų ir jas pasidalino po lygiai. Jei žmonių būtų buvę keturiais mažiau, tada kiekvienas asmuo būtų gavęs 10 monetų daugiau. Tačiau, jei būtų buvę 50 mažiau monetų, tada kiekvienas iš jų būtų gavęs 5 monetomis mažiau. Kiek monetų rado lobių ieškotojai? (4 balai)

Sprendimas. x pažymėkime monetų skaičių, o y – lobių ieškotojų skaičių. Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x}{y-4} = \frac{x}{y} + 10, \\ \frac{x-50}{y} = \frac{x}{y} - 5. \end{cases}$$

Antrąją lygtį padauginę iš y gauname $x - 50 = x - 5y$. Iš čia $y = 10$. Įrašę į pirmąją randame, kad $x = 150$. Vadinasi, lobių ieškotojai rado 150 monetų.

Atsakymas. 150 monetų.

6. Įrodykite lygybę

$$2 \cdot (\sin^6 x + \cos^6 x) - 3 \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0. \quad \text{(4 balai)}$$

Sprendimas.

$$\begin{aligned} &2 \cdot (\sin^6 x + \cos^6 x) - 3 \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = \\ &\quad = 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) - 3 \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = \\ &\quad = 2 \cdot \sin^4 x - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \cos^4 x - 3 \cdot \sin^4 x - 3 \cdot \cos^4 x + 1 = \\ &\quad = -(\sin^4 x + 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) + 1 = \\ &\quad = -(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + 1 = \end{aligned}$$

$= -1 + 1 = 0.$

7. Skaičių trejetai $\lg a, \lg b, \lg c$ ir $\lg a - \lg 2b, \lg 2b - \lg 3c, \lg 3c - \lg a$ sudaro aritmetinę progresiją. Ar skaičiai a, b ir c gali būti trikampio kraštinių ilgiai? (5 balai)

Sprendimas. Skaičių trejetas $\lg a, \lg b, \lg c$ sudaro aritmetinę progresija. Todėl

$$\lg b - \lg a = \lg c - \lg b, \quad \text{t. y.} \quad \lg \frac{b}{a} = \lg \frac{c}{b} \quad \text{ir} \quad b^2 = ac.$$

Analogiškai

$$(\lg 2b - \lg 3c) - (\lg a - \lg 2b) = (\lg 3c - \lg a) - (\lg 2b - \lg 3c), \quad \text{t. y.}$$

$$\lg \frac{2b}{3c} - \lg \frac{a}{2b} = \lg \frac{3c}{a} - \lg \frac{2b}{3c},$$

$$\lg \frac{4b^2}{3ac} = \lg \frac{9c^2}{2ab},$$

$$\frac{4b^2}{3ac} = \frac{9c^2}{2ab}, \quad 8b^3 = 27c^3, \quad 2b = 3c.$$

Sudarome sistemą

$$\begin{cases} 2b = 3c, \\ b^2 = ac. \end{cases}$$

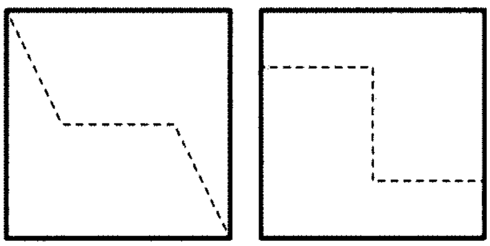
Išsprendę randame, kad $b = \frac{3c}{2}$, $a = \frac{9c}{4}$ (skaičiai a, b, c – teigiami).

Norint sudaryti trikampį, dviejų kraštinių ilgių suma turi būti didesnė už trečiosios ilgį. Surikiuokime skaičius didėjimo tvarka: $c, \frac{3}{2}c, \frac{9}{4}c$. Patikriname: $c + \frac{3}{2}c = \frac{5}{2}c > \frac{9}{4}c$. Vadinasi, skaičiai a, b ir c gali būti trikampio kraštinių ilgiai.

Atsakymas. Skaičiai a, b ir c gali būti trikampio kraštinių ilgiai.

8. Kvadratą lengvai galime padalinti į du lygius trikampius arba du lygius keturkampius. Ar galima kvadratą padalinti į du lygius penkiakampius arba du lygius šešiakampius? Jei taip, pateikite tokio padalinimo pavyzdį. (3 balai)

Sprendimas. Taip, galima (žr. paveikslėlį).



9. Palyginkite $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}} + \sqrt{2-\sqrt[3]{3}}$ ir $2\sqrt{2}$. (4 balai)

Sprendimas. Pažymėkime $a = \sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$, o $b = \sqrt{2-\sqrt[3]{3}}$ (pastebėkime, kad $a > 0$, $b > 0$). Žinome, kad $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Tada

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{2-\sqrt[3]{3}}}{2}, \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{2}.$$

Padauginę abi nelygybės puses iš 2, gauname

$$a+b \leq 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

arba

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{2-\sqrt[3]{3}} \leq 2\sqrt{2}.$$

Lygybės būti negali, nes $a \neq b$. Vadinasi, $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{2-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt{2}$.

Atsakymas. $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{2-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt{2}$.

10. 10 mašinų gamina vienodus guminius kamuoliukus, kurių kiekvieno masė yra po 10 g. Viena iš mašinų sugedo ir pradėjo gaminti kamuoliukus, kurių masė yra po 5 g. Kaip rasti sugedusią mašiną, jei kamuoliukus galime sverti tik vieną kartą? (5 balai)

Sprendimas. Paimkime pirmosios mašinos pagamintą vieną kamuoliuką, antrosios – du, trečiosios – tris, t. t., dešimtosios – dešimt. Rasime jų visų bendrą masę. Jei visi kamuoliukai būtų po 10 g, tai svarstyklės turėtų rodyti

$$10 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 550(g).$$

Jei primoji mašina gamina broką, tai bendra masė bus mažesnė 5 g, jei antroji – 10 g, t. t., jei dešimtoji – 50 g. Tokiu būdu iš 55 kamuoliukų masės galima sužinoti, kuri mašina gamina broką.

Komisijos pirmininkė prof. dr. Roma Kačinskaitė