Z kartos mokinių gabių matematikai atpažinimas ir jų ugdymo metodai

Parengė Šiaulių Stasio Šalkauskio gimnazijos matematikos mokytoja ekspertė Petrė Valda Grebeničenkaitė.

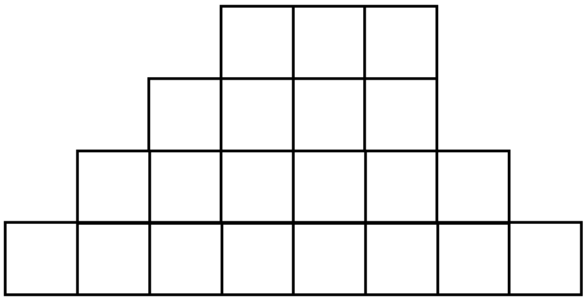
Z kartos mokinys – jaunasis tyrėjas. Pamokoje jis įsitraukia į veiklą nuo pat pradžių, ieško atsakymų į probleminius klausimus ir pats juos kelia, diskutuoja, pats dirba su įvairiais šaltiniais ir taip sprendžia iškeltą problemą. Svarbiausia – mokinio motyvavimas, įtraukimas, gilinimasis į tam tikrą problemą, o ne kuo didesnio mokomosios medžiagos kiekio perteikimas. Vis svarbesnis tampa ne žinių kiekis, o mokinių mąstymo ugdymas

Vakarų Europos šalyse plačiai naudojama metodika – mokymasis tiriant, kurią taikant mokiniai skatinami neapsiriboti vien faktų ir formulių įsiminimu, bet mokytis mąstyti, samprotauti, ieškoti informacijos, ją apdoroti, interpretuoti, įvertinti, atrasti įvairių problemų sprendimus.

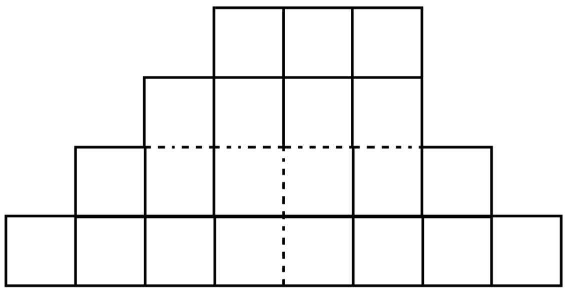
Gabių ir talentingų vaikų ugdymas kol kas kelia daugiau klausimų, negu pateikia atsakymų. Vienas iš klausimų: ar užtenka ugdyti tik vai ko gebėjimus? Atsakymas – tikrai ne. Būtina ugdyti ne tik gabumus ir talentus, bet ir pačią asmenybę, skatinti ir motyvuoti būti altruistiškam, moraliam, plačių interesų ir pažiūrų, tapti išsilavinusiu, aktyviu, pilietišku žmogumi. Ypač svarbu, kad gabieji, siekdami karjeros ar įsitvirtindami konkurencingoje visuomenėje, kurios vertybės neretai apverstos aukštyn kojomis, mokėtų dalytis savo mintimis, patraukliai paaiškinti, įtraukti, pakviesti ir kitus išdėstyti savo idėjas bei jas įgyvendinti. Juk ne veltui sakoma: „Jei aš tau duosiu obuolį ir tu man duosi obuolį, mes turėsime po vieną obuolį. Tačiau jei aš tau pasakysiu idėją ir tu man – kitą idėją, mes turėsime po dvi idėjas.“ Todėl dauguma tyrėjų jau seniai pripažino ir gabiems vaikams kuria programas, kurios apima ne tik gebėjimų, bet ir visos asmenybės – tiek psichologinės, tiek dvasinės, tiek ir fizinės sveikatos ugdymą. Taigi, mokytojams skiriamos tikrai nelengvos, iš pirmo žvilgsnio gal net sunkiai įveikiamos užduotys: pažinti kiekvieno vaiko gabumus, juos atskleisti ir ugdyti, o kartu lavinti asmenybę, kuri augdama gebėtų dalytis savo talentais ir gebėjimais su kitais. Priešingai gabumų ugdymas netektų prasmės. Mokytojams turėtų būti sudaromos kuo geresnės sąlygos atpažinti ir ugdyti gabias asmenybes, kurios ateityje ir lems mūsų visų gyvenimą (tiek materialųjį, tiek ir dvasinį).

Siūlome patikrinti vaikų gebėjimus matematikai tokiais uždaviniais:

1. Padalinti duotą figūra į tris lygias dalis:



Sprendimas:



2. Rasti mažiausią natūralųjį skaičių n tokį, kad $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ dalytųsi iš 2014.

Sprendimas:

$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$

Vadinasi, minimalus n, su kuriuo n dalijasi iš 2014 yra 53.

Ats.: n = 53.

3. Kaip $\frac{1}{10}$ išreikšti 10 teigiamų taisyklingų trupmenų sandauga?

Sprendimas:

$$\frac{1}{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{20}$$

Arba $\frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{63}{64}$

4. Keliais būdais 50 eurų galima pakeisti 1 ir 2 eurų monetomis?

Sprendimas:
2 eurų monetų gali būti nuo 0 iki 25. Todėl iš viso būdų bus 26.

Ats.: 26 būdai

5. Dvidešimt penki mokiniai dalyvavo matematikos konkurse ir jų rezultatai buvo skirtingi. Skaičius mokinių, pasirodžiusių blogiau už Miką, buvo dvigubai didesnis už skaičių mokinių, kuriems pasisekė geriau už Miką. Kurią vietą užėmė Mikas?

Sprendimas:

Tegul Mikas užėmė x-ąją vietą. Prieš jį buvo x-1 mokinys. Už jo buvo 25-x mokiniai. Sudarome lygtį:

$$25 - x = 2(x - 1)$$
$$-3x = -27$$
$$x = 9$$

Ats.: 9 vietą

6. Nuskendusioje karalystėje XIV amžiuje buvo rasti 6 maišai su auksinėmis monetomis. Pirmuose keturiuose maišuose buvo atitinkamai po 60, 30, 20 ir 15 auksinių monetų. Kai suskaičiavo monetas likusiuose dviejuose maišuose, pastebėjo, kad monetų skaičius maišuose sudaro tam tikrą seką. Kiek monetų buvo penktame ir šeštame maiše?

Sprendimas:

Visi skaičiai 60, 30, 20, 15 yra 60 dalikliai ir mažėja.
60 dalikliai: 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
Todėl penktame maiše buvo 12, o šeštame 10 auksinių monetų.

Ats.: 12 ir 10 monetų.

7. Jonas atėjo į parduotuvę pirkti dėžutės sausainių už 3 eurus ir šešių dėžučių saldainių, kurių kaina nebuvo nurodyta. Atėjus laikui sumokėti, kasininkė paprašė Jono 11 eurų ir 80 centų. Jonas paprašė perskaičiuoti kainą, nes ji pasirodė neteisinga. Kaip Jonas suprato, kad jį bandė apgauti?

Sprendimas:

Jei saldainių dėžutė kainavo x eurų, tai iš viso Jonas sumokėjo $3+6x$.

Akivaizdu, kad $3+6x$ dalijasi iš 3.
Bet 11,8 nėra dalus iš 3.
Todėl Jonas suprato, kad jį bandė apgauti.

8. Sandėlyje gulėjo kelios sveikos sūrio galvos. Naktį atėjusios žiurkės suėdė 10 sūrio galvų, visos po lygiai. Po to, kelioms žiurkėms suskaudo pilvą. Likusios 7 žiurkės kitą naktį baigė ėsti

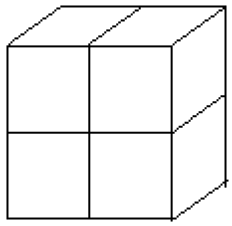
likusį sūrį, bet kiekviena suėdė du kartus mažiau nei praeitą naktį. Kiek sūrio galvų buvo iš pradžių?

Sprendimas:

Tegul buvo k žiurkių (k>7). Tada pirmą naktį kiekviena suėdė $\frac{10}{k}$ sūrio galvų. Kitą naktį kiekviena suėdė du kartus mažiau, t.y., po $\frac{5}{k}$ sūrio galvų. Visos 7 suėdė $\frac{5 \cdot 7}{k} = \frac{35}{k}$ sūrio galvų.
Vienintelis skaičiaus 35 daliklis didesnis už 7 yra 35.
$\frac{35}{k} = \frac{35}{35} = 1$
Vadinasi, iš pradžių sandėlyje buvo 10+1=11 sūrio galvų.

Ats.: 11 sūrio galvų

9. Kūnas sudarytas iš keturių vienodų kubelių. Kiekvieno kubelio paviršiaus plotas lygus $24\,cm^2$. Kam lygus pavaizduotos figūros paviršiaus plotas?



Sprendimas:

Vieno sienos kvadrato plotas lygus $24 : 6 = 4cm^2$.
Pavaizduoto kūno sienas sudaro atitinkamai 4, 4, 2, 2, 2, 2 kvadratai.
Tai kūno paviršiaus plotas lygus $(4+4+2+2+2+2) \cdot 4 = 64cm^2$

Ats.: $64\,cm^2$

10. Dviejų natūraliųjų skaičių, kurių kiekvienas nesidalija iš 10, sandauga lygi 1000. Rasti jų sumą.

Sprendimas:

$1000 = 2^3 \cdot 5^3$
Pažymime tuos du natūraliuosius skaičius a ir b.
$a \cdot b = 1000$
Rasti a+b.
Į a ir į b skaidinį pirminiais dauginamaisiais negali įeiti 2 ir 5 laipsniai, nes kitaip arba a, arba b dalytųsi iš 10. Todėl vienas skaičius lygus 2^3, o kitas 5^3. Jų suma:

$a + b = 2^3 + 5^3 = 8 + 125 = 133.$

Ats.: 133

Atrinkus gebančius Z kartos mokinius siūloma jiems pateikti spręsti savarankiškai tuos uždavinius, kuriuos spręsdami jie pajustų sėkmę:

1. Matematikos viktorinos dalyviams buvo pasiūlyta 20 klausimų. Už teisingą atsakymą mokinys gavo 12 taškų, už neteisingą prarado 10 tašų. Kiek teisingų atsakymų pateikė mokinys, atsakęs į visus klausimus ir surinkęs 86 taškus?

Sprendimas:

Jei mokinys būtų teisingai atsakęs į visus klausimus, būtų surinkęs $12 \cdot 20 = 240$ taškų. Bet jis nesurinko $240 - 86 = 154$ taškų, nes į kai kuriuos klausimus neatsakė. Už kiekvieną neteisingą atsakymą jis ne tik negavo 12 taškų, bet ir prarado 10 taškų, t.y. nesurinko $12 + 10 = 22$ taškų. Vadinasi, neteisingai jis atsakė į $154 : 22 = 7$ klausimus, o teisingai į 13 klausimų.

Ats.: 13 atsakymų

2. Dviratininkas apskaičiavo, kad jei jis važiuos $6\frac{km}{h}$ greičiu, tai jis pavėluos 1 valandą, jei važiuos $9\frac{km}{h}$ greičiu, tai atvažiuos 1 valanda anksčiau nustatyto laiko. Kokiu greičiu reikia važiuoti dviratininkui, kad atvažiuoti laiku?

Sprendimas:

Tegul nustatytas laikas buvo x h. Sudarome lygtį:

$$6(x+1) = 9(x-1)$$
$$x = 5\,(\text{h})$$
$$\frac{6(x+1)}{x} = \frac{6 \cdot 6}{5} = 7{,}2\frac{km}{h}$$

Ats.: $7{,}2\frac{km}{h}$

3. Įrodyti, kad pirminį skaičių dalijant iš 30 gaunamos liekanos yra pirminiai skaičiai arba 1.

Sprendimas:

Sprendžiant šį uždavinį siūloma pasinaudoti liekanų teorijos pradmenimis.
Pažymime pirminį skaičių $p = 30m + n$, kur m ir n sveikieji skaičiai. Čia n – liekana, gaunama p dalijant iš 30. Akivaizdu, kad n gali įgyti reikšmes nuo 1 iki 29. Liekana n negali dalytis iš 2, 3 arba 5, nes tada p dalytųsi iš 2, 3 arba 5. Lieka, kad n gali būti vienas iš skaičių (7;11;13;17;23;29) ir vienetas.
Įrodyta.

4. Firma turi išsiųsti 1100 užsakomų gaminių. Gaminiai pakuojami dėžėse. Turimos trijų rūšių dėžės. Pirmos rūšies viena dėžė talpina 70 detalių, antros rūšies viena dėžė talpina 40 detalių, o trečios rūšies viena dėžė talpina 25 detales. Pirmos rūšies vienos dėžės išsiuntimas kainuoja 200 eurų, antros rūšies dėžės – 100 eurų, o trečios – 70 eurų. Kiek kiekvienos rūšies dėžių reikia panaudoti, jei dėžės privalo būti užpildytos, o išsiuntimo kaina būtų mažiausia?

Sprendimas:

Pažymime pirmos, antros ir trečios rūšių dėžių skaičių atitinkamai m, n, k.
Sudarome lygtį:

$$70m + 40n + 25k = 1100$$

Tuomet išsiuntimo kaina lygi:

$N = 200m + 100n + 70k$ turi būti mažiausia.

Apskaičiuojame kiekvienos rūšies dėžės vienos rūšies detalės kainą.

1 rūšies dėžės vienos detalės kaina $\frac{200}{70} = 2{,}85...$ eurų

2 rūšies dėžės vienos detalės kaina $\frac{100}{40} = 2{,}5$ eurų

3 rūšies dėžės vienos detalės kaina $\frac{70}{25} = 2{,}8$ eurų

Todėl mes turime paimti didžiausią galima antros rūšies dėžių skaičių ir mažiausią pirmos rūšies dėžių skaičių. Vadinasi, $m = 0$.

Tada $\begin{matrix} 40n + 25k = 1100 \\ 100n + 70k = N \end{matrix}$

$$8n + 5k = 220$$

$$n = \frac{220 - 5k}{8}$$

Gauname, kad $k = 12, n = 20$ arba $k = 4, n = 25$.
Todėl $k = 4, n = 25, m = 0$.

Ats.: Pirmos rūšies 4 dėžes, antros rūšies 25 dėžės, o trečios rūšies dėžių neimti.

5. Išspręsti lygtį sveikaisiais skaičiais $2x^2 - 5y^2 = 7$.

Sprendimas:

Kadangi 7 – pirminis nelyginis skaičius, o $2x^2$ - lyginis, tai $5y^2$ - nelyginis, y^2 - nelyginis ir y - nelyginis.
Pažymime $y = 2m+1$, čia m - sveikas skaičius.
$y^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$, $5y^2 = 20m^2 + 20m + 5$.
Įrašome į pradinę lygtį:

$$2x^2 - 20m^2 - 20m - 5 = 7$$
$$x^2 - 10m^2 - 10m = 6$$

$10m^2$ ir $10m$ lyginiai, todėl skaičius $x^2 - 10m^2 - 10m = 6$ taip pat lyginis, kai x^2 lyginis.
Pažymime $x = 2n$, $x^2 = 4n^2$, čia n – sveikas skaičius.

Gauname lygtį $4n^2 - 10m^2 - 10m = 6$, $2n^2 - 5m^2 - 5m = 3$, $2n^2 - 5m(m+1) = 3$.
$2n^2$ - lyginis, $m(m+1)$ taip pat lyginis, todėl kairė gautos lygties pusė lyginė. Tada dešinė gautos lygties pusė taip pat privalo būti lyginė. Bet 3 – nelyginis.
Vadinasi, duotoji lygtis neturi sprendinių sveikaisiais skaičiais.

Ats.: neturi sprendinių.

6. Prie skaičiaus galima pridėti jo skaitmenų sumą. Ar galima iš 3 per keletą žingsnių gauti skaičių 20172017? Įrodykite.

Sprendimas:

Kiekvienu žingsniu pridedame gauto skaičiaus skaitmenų sumą. Kadangi skaičius 3 dalijasi iš 3 be liekanos, tai ir skaičiai, kuriuos gausime tokių operacijų metu, dalijasi iš 3 be liekanos, o skaičius 20172017 nesidalija iš 3 be liekanos.

Ats.: Negalima

7. Kelių triženklių natūraliųjų skaičių vidurinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų aritmetiniam vidurkiui?

Ats.: 45

8. Rasti skaičių sekos 1;2;4;7;... 100-ąjį narį, tenkinantį sąlygą, kad skirtumai taro gretimų sekos narių sudaro iš eilės einančių natūraliųjų skaičių seką, kurios pirmasis narys lygus 1.

Ats.: $a_{100} = 4951$

9. Rasti mažiausią reikšmę $x + \frac{1}{4x}$, kai $x \geq 0$. Nurodymas: panaudokite Koši nelygybę.

Ats.: 1

10. Išspręsti sveikaisiais skaičiais lygtį $9x + 2 = y(y+1)$.

Ats.: $x = k(k+1), y = 3k+1, \ \ k \in Z$.

11. Išspręsti lygtį $x^2 + y^2 + z^2 = 8k - 1$ sveikaisiais skaičiais.

Ats.: lygtis sprendinių neturi

12. Duotas iškilas keturkampis su įstrižainėmis 10cm ir 7cm. Įrodykite, kad supjausčius tą keturkampį gautais gabalais negalima uždengti kvadrato 6x6cm.

13. Dalius gyvena devynaukščiame name. Jis nusileidžia liftu iš savo aukšto į pirmą aukštą per 1 minutę. Dėl mažo ūgio Dalius negali pasiekti savo aukšto mygtuko, todėl keldamasis į viršų jis nuspaudžia tą mygtuką, kurį pasiekia ir toliau lipa pėsčias. Visas kelias į viršų trunka 1 minutę ir 10 sekundžių. Liftas į viršų ir į apačią važiuoja vienodu greičiu. Dalius lipa į viršų 2 kartus mažesniu greičiu negu liftas. Kuriame aukšte gyvena Dalius?

Ats.: 7 aukšte.

Z kartos mokiniai spręs šias sudėtingesnes „įkandamas“ užduotis, jei turės galimybę pajusti kūrybos džiaugsmą. Mokytojo pareiga sugebėti moksleivius palaikyti morališkai ir įkvėpti tikėjimo savo gabumais matematikai.