XIV Jaunųjų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

Kretingos Jurgio Pabrėžos universitetinė gimnazija,
Kretinga, 2015-10-27

9–10 vidurinių mokyklų (1–2 gimnazijų) klasių uždaviniai ir jų sprendimai

1. Skaičiai a, b ir c yra tokie, kad $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2015$ bei $a \neq b$. Raskite reiškinio $c^2(a+b)$ reikšmę. (2 balai)

Sprendimas. Iš sąlygos turime, kad

$$a^2(b+c) - b^2(a+c) = ab(a-b) + (a^2-b^2)c = (a-b)(ab+ac+bc) = 0.$$

Kadangi $a \neq b$, tai $ab+ac+bc = 0$. Padauginę iš $a-c$ gauname, kad

$$(a-c)(ac+ab+bc) = ac(a-c) + (a^2-c^2)b = a^2(b+c) - c^2(a+b) = 0.$$

Iš čia

$$c^2(a+b) = a^2(b+c) = 2015.$$

Atsakymas. 2015.

2. Saloje gyvena 100 riterių ir 100 melagių. Kiekvienas iš jų turi bent vieną draugą. Riteriai visada sako tiesą, o melagiai visada meluoja. Kartą ryte kiekvienas gyventojas pasakė arba „visi mano draugai – riteriai“, arba „visi mano draugai – melagiai“. Kiekvieną frazę ištarė lygiai 100 žmonių. Raskite mažiausią galimą draugų porų, kurioje vienas yra riteris, o kitas – melagis, kiekį. (3 balai)

Sprendimas. Įrodysime, kad galima rasti nemažiau 50 draugų porų, kurioje vienas asmuo yra riteris, o kitas – melagis. Jeigu frazę „visi mano draugai – melagiai“ ištarė nemažiau nei 50 riterių, tai kiekvienas iš jų pažįsta bent vieną melagį, ir reikalingos 50 porų rastos. Priešingu atveju frazę „visi mano draugai – melagiai“ pasakė nemažiau kaip 50 melagių. Bet, kadangi melagiai meluoja, tai kiekvienas iš jų pažįsta bent vieną riterį, taip vėl gauname reikiamas 50 porų.

Įrodysime, kad galimas atvejis, kai „riterių–melagių“ yra tik 50 porų. $k_1, k_2, ..., k_{100}$ pažymėkime riterius, o melagius – $l_1, l_2, ..., l_{100}$. Sakykime, kad k_1 riteris draugauja tik su l_1 melagiu, k_2 riteris – tik su l_2 melagiu,..., k_{50} riteris – tik su l_{50} melagiu (be to visi $l_1, ..., l_{50}$ melagiai daugiau su niekuo nedraugauja). Sakykime, kad $k_{51}, ..., k_{100}$ riteriai draugauja tik tarpusavyje, kaip ir $l_{51}, ..., l_{100}$ melagiai. Tada „riterių – melagių“ porų yra lygiai 50, o 100 žmonių $k_1, ..., k_{50}, l_1, ..., l_{50}$ ištaria frazę „visi mano draugai – melagiai“, o likę 100 – „visi mano daugai – riteriai“.

Atsakymas. 50 porų.

3. Ar su visais teigiamais skaičiais a ir b yra teisinga nelygybė $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$? Atsakymą pagrįskite. (2 balai)

Sprendimas. Pažymėkime $x = b^{1/15}$ ir $y = a^{1/10}$. Gauname

$$2y^5 + 3x^5 \geq 5y^2x^3.$$

Padaliję iš y^5 ir pažymėję $t = \frac{x}{y}$ gauname $3t^5 - 5t^3 + 2 \geq 0$. Kairiąją nelygybės pusę išskaidome dauginamaisiais, t. y.

$$f(t) := (3t^5 - 3t^3) - (2t^3 - 2) \geq 0,$$

$$3t^3(t^2-1) - 2(t-1)(t^2+t+1) \geq 0,$$

$$(t-1)(3t^3(t+1) - 2(t^2+t+1)) \geq 0,$$

$$(t-1)(3t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 2t - 2) \geq 0,$$

$$(t-1)((2t^4 - 2t^2) + (t^4 - t) + (t^3 - t) + (2t^3 - 2)) \geq 0,$$

$$(t-1)(2t^2(t^2-1) + t(t^3-1) + t(t^2-1) + 2(t^3-1)) \geq 0,$$

$$(t-1)^2(2t^2(t+1) + t(t^2+t+1) + t(t+1) + 2(t^2+t+1)) \geq 0,$$

$$(t-1)^2(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2) \geq 0.$$

Kai $t > 0$, pirmasis dauginamasis (pirmieji skliaustai) ≥ 0, antrasis dauginamasis (antrieji skliaustai) – taip pat teigiamas. Todėl $f(t) \geq 0$ su visais $t > 0$.

Lygybė nuliui galima tik su $t = 1$, t. y., kai $x = y$ arba su $a^3 = b^2$.

4. Žinoma, kad trikampio kampų kotangentai sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad tada ir jo kraštinių kvadratai sudaro aritmetinę progresiją. (2 balai)

Sprendimas. Sakykime, kad trikampio kraštinės yra pažymėtos a, b, c, o prieš jas esantys kampai atitinkamai A, B, C.

Pagal kosinusų teoremą $a^2 - b^2 = ac \cdot \cos B - bc \cdot \cos A$, o pagal sinusų teoremą $bc = \frac{2S}{\sin A}$ ir $ac = \frac{2S}{\sin B}$ (čia S žymi trikampio plotą). Todėl

$$b^2 - a^2 = 2S(\mathrm{ctg}A - \mathrm{ctg}B) \quad \text{ir} \quad c^2 - b^2 = 2S(\mathrm{ctg}B - \mathrm{ctg}C).$$

Kadangi sąlygoje pasakyta, kad kampų kotengentai sudaro aritmetinę progresiją, tai

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2.$$

Vadinasi, trikampio kraštinės taip pat sudaro aritmetinę progresiją.

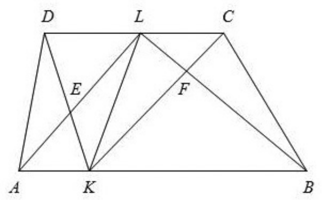
5. Žinoma, kad skaičiai a, b, c ir d tenkina lygybę $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Ar skaičius $a \cdot b \cdot c$ dalus iš 4? (1 balas)

Sprendimas. Lyginio skaičiaus kvadratas yra dalus iš 4, o nelyginio skaičiaus kvadratą dalydami iš 4 gauname liekaną lygią 1. Jeigu skaičiai a, b, c – nelyginiai, tai skaičių d^2 dalydami iš 4 turime dauti liekaną lygią 3, o to būti negali. Jei tarp skaičių a, b, c

yra du lyginiai ir vienas nelyginis, tai d^2 dalydami iš 4 gautume liekaną 2, ko taip pat negali būti. Vadinasi, tarp skaičių a, b, c yra du lyginiai skaičiai, todėl sandauga abc yra dali iš 4. Pvz.: $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$.

Atsakymas. abc yra dalus iš 4.

6. Trapecijos $ABCD$ pagrinduose pažymėti taškai K ir L. Sakykime, kad atkarpos AL ir DK susikerta taške E, o BL ir CK – taške F. Įrodykite, kad trikampių ADE ir BCF plotų suma lygi keturkapmio $EKFL$ plotui. (2 balai)



Sprendimas. $S_{\triangle ADK} = S_{\triangle ALK}$, nes jie turi bendrą pagrindą AK ir lygias aukštines (jų ilgis lygus atstumui tarp trapecijos pagrindų AB ir DC). Todėl $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ADK} - S_{\triangle AEK} = S_{\triangle ALK} - S_{\triangle AEK} = S_{\triangle KLE}$. Analogiškai gauname, kad $S_{\triangle BCF} = S_{\triangle KLF}$. Iš čia seka, kad trikampių ADE ir BCF plotų suma lygi keturkampio $EKFL$ plotui.

7. 33 galiūnai sustojo eilėje taip, kad kiekvienas galiūnas su lyginiu numeriu buvo 8 cm žemesnis už prieš jį stovintį ir 3 cm žemesnis nei esantis už jo. Kiek centimetrų pirmasis galiūnas aukštesnis už paskutinįjį eilėje? Atsakymą paaiškinkite. (1 balas)

Sprendimas. Kadangi antrasis galiūnas yra žemesnis už pirmąjį 8 cm ir 3 cm už trečiąjį, tai pirmasis galiūnas yra aukštesnis už trečiąjį 5 cm. Taip pat ir trečiasis aukštesnis už penktąjį, penktasis – už septintąjį ir t. t. Galiūnų su lyginiai numeriais yra 16. Vadinasi, pirmasis yra aukštenis už 33-iąjį $5 \cdot 16 = 80$ cm.

Atsakymas. 80 cm.

8. Bet kurioje žmonių grupėje bus du asmenys, turintys joje tokį pat pažįstamų skaičių. Paaiškinkite šį teiginį. (3 balai)

Sprendimas. Tarkime, kad žmonių grupę sudaro k asmenų. Tada kiekvienas žmogus gali turėti nuo nulio iki $k - 1$ pažįstamų.

Dabar sakykime priešingai nei sąlygoje: kiekvienas žmogus turi skirtingą pažįstamų skaičių. Tada grupėje atsiras žmogus neturintis pažįstamų, turintis tik vieną pažįstamą ir t. t. Galiausiai atsiras asmuo, kuris turės $k - 1$ pažįstamų. Vadinasi, šis, paskutinis žmogus, pažįsta visus – tame tarpe ir pirmąjį (neturintį pažįstamų). Todėl pirmasis negali neturėti pažįstamų. Gauname prieštarą.

9. x, y, x yra nelygūs nuliui realieji skaičiai tokie, kad yra teisinga lygybė $\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$. Raskite visas galimas reiškinio $\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz}$ reikšmes. (3 balai)

Sprendimas. Lygybę $\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y}$ padauginę iš yz išskaidome dauginamaisiais. Gauname, kad $(x + y + z)(y - z) = 0$. Todėl $x + y + z = 0$ arba $y - z = 0$. Tą patį padarę su antrąją lygybe gauname $(x-y)(x+y+z)=0$. Iš čia, arba $x+y+z=0$, arba $x=y=z$.

Kai $x+y+z=0$, išreiškę $x=-(y+z)$, įrašę į duotąjį reiškinį bei atlikę veiksmus gauname $\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz}=-1$.

Kai $x=y=z$, pertvarkę duotąjį reiškinį gauname $\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz}=8$.

Atsakymas. $x=\{-1;8\}$.

10. Dalia pakvietė Gediminą į svečius. Mergina pasakė, kad gyvena 10-oje laiptinėje, o buto numeris yra 333, tačiau nenurodė aukšto. Priėjęs prie namo Gediminas pamatė, kad jis yra devynaukštis. Į kelintą aukštą turi lipti vaikinas? Atsakymą paaiškinkite. Pastaba: namo visuose laiptinių aukštuose butų yra vienodai; butų numeracija prasidada nuo 1. (1 balas)

Sprendimas. Sakykime, kad kiekviename aukšte yra n butų. Tada vienoje laiptinėje yra $9n$ butų. Kadangi 333 butas yra 10-oje laiptinėje, tai devyniose laiptinėse yra mažiau nei 333 butų, o dešimtyje – nemažiau nei 333. Vadinasi, $9\cdot 9n<333\leq 10\cdot 9n$, t. y. $81n<333\leq 90n$. Iš čia gauname $\frac{333}{90}\leq n<\frac{333}{81}$, t. y. ir $3\frac{7}{10}<n<4\frac{1}{9}$. Bet butų numeriai yra natūralieji skaičiai, o vienintelis toks sąlygą tenkinantis skaičius yra 4. Todėl $n=4$, t. y. kiekviename aukšte yra po 4 butus. Tada pirmose devyniose laiptinėse yra $9\cdot 9\cdot 4=324$ butai. Tai reiškia, kad Dalios butas yra 9-asis iš eilės laiptinėje, t. y. 3 aukšte. Todėl Gediminui reikia lipti į trečią aukštą.

Atsakymas. Į trečią aukštą.

Vertinimo komisijos pirmininkė
Prof. dr. Roma Kačinskaitė