XIV Jaunųjų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

Kretingos Jurgio Pabrėžos universitetinė gimnazija,
Kretinga, 2015-10-27

11–12 vidurinių mokyklų (3–4 gimnazijų) klasių uždaviniai ir jų sprendimai

1. Duotas kvadratinis trinaris $f(x) = x^2 + ax + b$. Žinoma, kad su kiekvienu realiuoju x egzistuoja toks realusis y, kad $f(y) = f(x) + y$. Raskite didžiausią galimą x reikšmę. (2 balai)

Sprendimas. Iš sąlygos matome, kad kvadratinė lygtis $f(y) - y - f(x) = 0$ yra išsprendžiama y atžvilgiu su visais x.

Atlikę keitinį $x = -\frac{a}{2}$ gauname lygtį

$$y^2 + (a-1)y + \frac{a^2}{4} = 0,$$

kurios diskriminantas yra $D = (a-1)^2 - a^2 = 1 - 2a \geq 0$. Iš čia $a \leq \frac{1}{2}$.

Iš kitos pusės, jei $a = \frac{1}{2}$, tai kiekvienam x galima imti $y = -x$. Tada

$$f(y) - y - f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}x + b\right) + x - \left(x^2 + \frac{1}{2}x + b\right) = 0.$$

Akivaizdu, kad trinario $f(y) - y - f(x)$ diskriminanto minimumą gauname, kai $x = -\frac{a}{2}$. Todėl, jei su $x = -\frac{a}{2}$ jis yra neneigiamas, tai ir su bet kuria kita reikšme jis yra neneigiamas.

Atsakymas. $x = \frac{1}{2}$.

2. Įrodykite, kad bet kuriems natūraliesiems skaičiams m ir n (didesniems už 1) nors vienas iš skaičių $\sqrt[m]{n}$ ir $\sqrt[n]{n}$ neviršija $\sqrt[3]{3}$. (3 balai)

Sprendimas. Akivaizdu, kad $m \geq 2$ ir $n \geq 2$. Todėl $\sqrt[m]{n} \leq \sqrt[n]{n}$. Vadinasi, pakanka įrodyti, kad

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3} \quad (\text{arba } n^{1/n} \leq 3^{1/3}). \tag{1}$$

Pastebėkime, kad su $n = 2$ yra teisinga nelygybė $2^{1/2} \leq 3^{1/3}$ (abi puses pakėlę 6-uoju laipsniu gauname $8 < 9$). Logaritmavus abi (1) nelygybės puses gauname

$$\frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln 3}{3} \quad \text{su visais} \quad n \geq 3.$$

Nagrinėkime funkciją $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Jos išvestinė yra $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Jeigu $x \geq 3 > e$, tai $\ln x > \ln 3 > 1$. Todėl $f'(x) < 0$. Tai reiškia, kad su $x \geq 3$ funkcija $f(x)$ mažėja. Iš čia seka, kad su $n \geq 3$ yra tenkinama nelygybė $f(n) \leq f(3)$. Tai parodo, kad sąlygoje minimos nelygybės yra teisingos.

3. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} + \frac{1}{x+12} + \frac{1}{x+14} = 0. \quad (2 \text{ balai})$$

Sprendimas. Pažymėkime $y = x + 7$. Tada

$$\frac{1}{y-7} + \frac{1}{y-5} - \frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+3} + \frac{1}{y+5} + \frac{1}{y+7} = 0.$$

Sugrupuokime

$$\left(\frac{1}{y-7} + \frac{1}{y+7}\right) + \left(\frac{1}{y-5} + \frac{1}{y+5}\right) - \left(\frac{1}{y-3} + \frac{1}{y+3}\right) - \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) = 0.$$

Iš čia

$$\frac{2y}{y^2-49} + \frac{2y}{y^2-25} - \frac{2y}{y^2-9} - \frac{2y}{y^2-1} = 0,$$

t. y.

$$2y\left(\frac{1}{y^2-49} + \frac{1}{y^2-25} - \frac{1}{y^2-9} - \frac{1}{y^2-1}\right) = 0.$$

Iš pastarosios lygybės gauname $y = 0$, todėl $x = -7$. Pažymėję $z = y^2$ gauname

$$\frac{1}{z-49} + \frac{1}{z-25} - \frac{1}{z-9} - \frac{1}{z-1} = 0.$$

Sugrupuojame

$$\left(\frac{1}{z-49} - \frac{1}{z-1}\right) + \left(\frac{1}{z-25} - \frac{1}{z-9}\right) = 0$$

ir

$$\frac{48}{z^2-50z+49} + \frac{16}{z^2-34z+225} = 0.$$

Suprastinę iš 16 ir subendravardiklinę gauname

$$3(z^2-34z+225) + (z^2-50z+49) = 0$$

(žinoma, $z \neq 1$, $z \neq 9$, $z \neq 25$, $z \neq 49$). Sutraukę panašius narius turime

$$4z^2 - 152z + 724 = 0,$$

o suprastinę iš 4 gauname

$$z^2 - 38z + 181 = 0.$$

Šios lygties sprendiniai yra

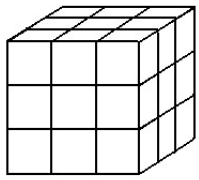
$$z = y^2 = 19 \pm 6\sqrt{5}.$$

Todėl $y = \pm\sqrt{19 \pm 6\sqrt{5}}$, o $x = y - 7 = -7 \pm \sqrt{19 \pm 6\sqrt{5}}$ su įvairiomis galimomis ženklo reikšmėmis.

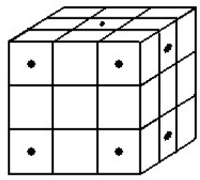
Atsakymas. $x = -7$, $x = -7 \pm \sqrt{19 \pm 6\sqrt{5}}$.

4. Rubiko kubo $3\times3\times3$ paviršių sudaro 54 kvadratėliai. Kokį didžiausią kvadratėlių skaičių galima pažymėti taip, kad pažymėtieji neturėtų bendrų viršūnių? Atsakymą paaiškinkite. (1 balas)

Sprendimas. Paveiksle parodyta, kaip pažymėti 7 kvadratėlius trijose šalia esančiose kubo sienelėse. Trijose „nematomose“ sienelėse kvadratėlius galima pažymėti simetriškai parodytiems. Įrodysime, kad daugiau nei 14 kvadratėlių negali būti pažymėta.



Suskaičiuokime, kiek iš viso Rubiko kube yra kvadratėlių viršūnių. Pačio kubo yra 8 viršūnės, dar po dvi viršūnes yra kiekvienoje iš 12 briaunų bei po 4 viršūnes kikevinoje iš 6 sienelių. Iš viso yra $8 + 12 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 56$ viršūnės. Sąlygoje pasakyta, kad kiekviena iš viršūnių gali priklausyti nedaugiau kaip vienam pažymėtam kvadratėliui. Jei pažyėtų kvadratėlių būtų daugiau nei 14, tai viršūnių būtų daugiau nei $14 \cdot 4 = 56$, nes kiekvienas kvadratėlis turi 4 viršūnes. Vadinasi, pažymėti galima nedaugiau kaip 14 kvadratėlių.



Atsakymas. 14 kvadratėlių.

5. Įrodykite, kad bet kokiems skaičiams a, b, c teisinga nelygybė

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc. \quad \text{(1 balas)}$$

Sprendimas. Visus narius keliame į vieną pusę bei išskiriame pilnąjį kvadratą:

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab + ac - 2bc = \left(\frac{a}{2} - b + c\right)^2 \geq 0.$$

6. Realieji skaičiai $x_1, x_2, ..., x_{2015}$ yra tokie, kad yra teisinga lygybė

$$x_1^{2014} + ... + x_{2015}^{2014} = 1 \quad \text{ir} \quad x_1^{2015} + ... + x_{2015}^{2015} = -1.$$

Apskaičiuokite reiškinio $x_1 + x_2^2 + x_3^3 + ... + x_{2015}^{2015}$ reikšmę. (2 balai)

Sprendimas. Iš pirmosios lygybės matome, kad $-1 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, ..., 2015$. Iš čia turime, kad visiems i teisinga nelygybė $0 \leq x_i + 1 \leq 2$. Sudėję abi sąlygoje duotas lygybes gauname

$$x_1^{2014}(x_1 + 1) + x_2^{2014}(x_2 + 1) + ... + x_{2015}^{2014}(x_{2015} + 1) = 0.$$

Pastebime, kad kiekvienas dėmuo $x_i^{2014}(x_i + 1) \geq 0$. Vadinasi, tokia suma gali būti lygi nuliui, tik jei kiekvienas dėmuo lygus nuliui. Todėl $x_i \in \{0; 1\}$. Iš pirmosios lygybės matome, kad tik vienas iš skaičių gali būti nenulis. Tada $x_i = -1$ su tam tikru $1 \leq i \leq 2015$ ir $x_j = 0$ su $j \neq i$. Iš čia turime

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + ... + x_{2015}^{2015} = 1, \quad \text{jei} \quad i \text{ yra lyginis},$$

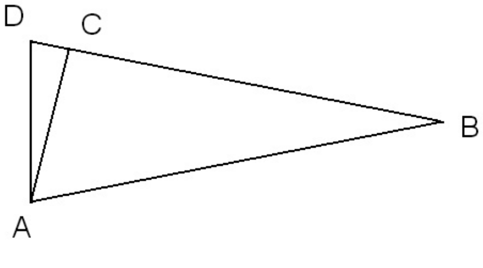
ir

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + ... + x_{2015}^{2015} = -1, \quad \text{jei} \quad i \text{ yra nelyginis},$$

Atsakymas. $x = \pm 1$.

7. Ar teisinga lygybė $\mathrm{ctg}30^0 + \mathrm{ctg}75^0 = 2$? Atsakymą pagrįskite. (3 balai)

Sprendimas. Nagrinėkime lygiašonį trikampį ABD, kurio kampas prie viršūnės B yra lygus 30^0.



Nubrėžkime aukštinę AC. Tada

$$\mathrm{ctg}30^0 = \frac{BC}{AC}, \quad \mathrm{ctg}75^0 = \frac{CD}{AC}.$$

Iš čia

$$\mathrm{ctg}30^0 + \mathrm{ctg}75^0 = \frac{BC}{AC} + \frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AC}.$$

Bet $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BD$. Iš čia gauname sąlygoje esančią lygybę.

8. Atsitiktinai susitiko dvi herojės: Rapunzelė iš brolių Grimų pasakų ir Alisa iš L. Kerolio „Alisa stebuklų šalyje". Mergaitės prisėdo ant suolo pakalbėti. Rapunzelės plaukai auga du kartus greičiau nei ji pati, o Alisos, augančios Rapunzelės plaukų greičiu, – pusantro karto greičiau nei auga pati. Šiuo metu mergaičių plaukai yra vienodu atstumu nuo grindų. Kurios iš jų plaukai greičiau pasieks grindis? Paaiškinkite, kodėl. (2 balai)

Sprendimas. Rapunzelės augimo greitį pažymėkime x. Tada jos plaukai auga $2x$ greičiu, o prie grindų artėja $2x - x = x$ greičiu. Alisa pati auga $2x$ greičiu. Vadinasi, jos plaukai auga $1,5 \cdot 2x = 3x$ greičiu ir prie grindų artėja $3x - 2x = x$ greičiu. Gavome, kad mergaičių plaukai prie grindų artėja vienodu greičiu, todėl ir pasieks jas tuo pačiu metu.

Atsalymas. Tuo pačiu metu.

9. Raskite visas tarpusavyje pirminių natūraliųjų skaičių a ir b poras tokias, kad $a^2 + 2b^2$ dalytųsi iš $a + 2b$. Pastaba: tarpusavyje pirminiais skaičiais vadinami tokie skaičiai, kurių didžiausias bendrasis daliklis yra vienetas. (1 balas)

Sprendimas. Pastebėkime, kad $a^2 - 4b^2 = (a + 2b)(a - 2b)$ dalijasi iš $a + 2b$. Todėl $6b^2 = (a^2 + 2b^2) - (a^2 - 4b^2)$ ir $3a^2 = 2(a^2 + 2b^2) + (a^2 - 4b^2)$ dalijasi iš $a + 2b$. Vadinasi, jeigu $a + 2b$ dalytųsi iš pirminio nelygaus 2 ir 3 skaičiaus p, tai $6b^2$ ir $3a^2$ dalytųsi iš p, kuris būtų tarpusavyje pirminis su 3 ir 6, o a ir b taip pat dalytųsi iš to skaičiaus. To būti negali, nes skaičiai – tarpusavye priminiai. Taip pat, jei $a + 2b$ dalytųsi iš 3^2, tai $6b^2$ ir $3a^2$ dalytųsi iš 3^2, o $2b^2$ ir a^2 dalytųsi iš 3, kaip ir a bei b dalytųsi iš 3. Tačiau tada jie nebūtų tarpusavyje pirminiais. Analogiškai, jei $a+2b$ dalytųsi iš 2^2, tai a ir b dalytųsi iš 2, bet jie vėl nebūtų tarpusavyje pirminiais.

Gavome, kad $a+2b$ dalijasi tik iš 2 ir 3, o taip pat nesidalija iš 2^2 ir 3^2. Todėl $a+2b$ lygus 1, 2, 3 arba 6. Lygtis $a+2b=6$ turi vienintelį sprendinį, sudarytą iš tarpusavyje pirminių natūraliųjų skaičių $a=4$, $b=1$; jis tenkina uždavinio sąlygą, nes $a^2+2b^2=18$, o 18 yra dalus iš 6. Analogiškai, lygtis $a+2b=3$ turi sprendinį $a=b=1$, kuris taip pat tenkina duotąją sąlygą. Tuo tarpu lygtys $a+2b=2$ ir $a+2b=1$ natūraliųjų sprendinių neturi.

Ats.: (1,1) ir (4,1).

10. $a_1, a_2, ..., a_n$ sudaro didėjančią natūraliųjų skaičių aritmetinę progresiją. Žinoma, kad $a_3 = 13$. Kam lygi suma $a_{a_1}+a_{a_2}+a_{a_3}+a_{a_4}+a_{a_5}$? (3 balai)

Sprendimas. d pažymėję duotosios progresijos skirtumą turime, kad $a_1=a_3-2d$, $a_2=a_3-d$, $a_4=a_3+d$, $a_5=a_3+2d$. Tegul $S=a_{a_1}+a_{a_2}+a_{a_3}+a_{a_4}+a_{a_5}$. Kiekviena aritmetinė progresija pasižymi savybe, kad $a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n$. Todėl

$$a_{a_1}+a_{a_5}=a_{a_3-2d}+a_{a_3+2d}=2a_{a_3}=2a_{13}$$

ir

$$a_{a_2}+a_{a_4}=a_{a_3-d}+a_{a_3+d}=2a_{a_3}=2a_{13}.$$

Vadinasi, $S=5a_{13}$. Dabar pastebėkime, kad $a_{13}=a_3+10d$, o $S=5(13+10d)$. Iš gauto sąryšio matome, kad S bus didžiausias su didžiausia d reikšme. Bet $a_1=a_3-2d=13-2d$ – natūralusis skaičius. Todėl $d\le 6$. Kai $d=6$, visi aritmetinės progresijos nariai yra natūralieji skaičiai ir $S=5(13+60)=365$.

Atsakymas. 365.

Vertinimo komisijos pirmininkė
Prof. dr. Roma Kačinskaitė