XVI Komandinė jaunųjų matematikų olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

J. Pabrėžos universitetinė gimnazija,
Kretinga, 2017-10-30

9–10 vidurinių mokyklų (1–2 gimnazijų) klasių uždaviniai ir jų sprendimai

1. Keturi vienas po kito einantys sveikieji skaičiai yra (teigiamo) keturženklio skaičiaus tūkstančių, šimtų, dešimčių ir vienetų skaitmenys. Kiek padidės šis skaičius jo skaitmenis užrašius atvirkščia tvarka?

Sprendimas. Pirmąjį skaičių pažymėkime n, tada kiti trys po jo einantys skaičiai bus $n+1, n+2, n+3$. Tokiu atveju pradinį keturženklį skaičių užrašome taip:

$$1000n + 100\,(n+1) + 10\,(n+2) + n + 3.$$

Užrašius skaitmenis atvirkščia tvarka gauname

$$1000\,(n+3) + 100\,(n+2) + 10\,(n+1) + n.$$

Ieškomas skaičių skirtumas lygus

$$1000\,(n+3)+100\,(n+2)+10\,(n+1)+n-(1000n + 100\,(n+1) + 10\,(n+2) + n + 3) =$$

$$= 1111n + 3210 - (1111n + 123) = 3087.$$

Atsakymas. 3087.

2. Kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ šaknys yra x_1 ir x_2. Žinoma, kad $\frac{1}{1+x_1}$ ir $\frac{1}{1+x_2}$ taip pat yra šios kvadratinės lygties šaknys. Raskite p ir q.

Sprendimas. Darome dvi prielaidas.

1) $x_1 = \frac{1}{1+x_1}, x_2 = \frac{1}{1+x_2}$.

Tai reiškia, kad abi šaknis atitinka lygybė $x = \frac{1}{1+x}$. Iš to seka, kad $x^2 + x - 1 = 0$. Tuomet $p = 1, q = -1$.

2) $x_1 = \frac{1}{1+x_2}, x_2 = \frac{1}{1+x_1}$.

Iš tokios prielaidos matome, kad abi šaknis atitinka lygybė

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}.$$

Iš to gauname, kad $x^2 + x - 1 = 0$, kai $x = \frac{1}{1+x}$. Tačiau tai reiškia, kad $x_1 = \frac{1}{1+x_2} = x_2$, o šitaip būti negali, nes lygties $x^2 + x - 1 = 0$ šaknys yra skirtingos. Taigi, šita prielaida netinka.

Atsakymas. $p = 1, q = -1$.

3. Suprastinkite reiškinį

$$\left(\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3\right):\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3\right):\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}.$$

Sprendimas.

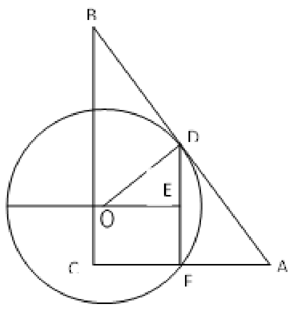
$$\left(\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3\right):\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3\right):\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a+1)^2+3\,(a-1)^2}{(a-1)^2}:\frac{(a-1)^2+3\,(a+1)^2}{(a+1)^2}:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}=\\
&= \frac{a^2+2a+1+3a^2-6a+3}{(a-1)^2}\cdot\frac{(a+1)^2}{a^2-2a+1+3a^2+6a+3}:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}=\\
&= \frac{4a^2-4a+4}{(a-1)^2}\cdot\frac{(a+1)^2}{4a^2+4a+4}:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}=\\
&= \frac{4\,(a^2-a+1)\cdot(a+1)^2}{(a-1)^2\cdot 4\,(a^2+a+1)}:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}=\\
&= \frac{4\,(a+1)\,(a^3+1)}{4\,(a-1)\,(a^3-1)}\cdot\frac{a^3-1}{a^3+1}-\frac{2a}{a-1}=\frac{a+1}{a-1}-\frac{2a}{a-1}=\frac{1-a}{a-1}=-1.
\end{aligned}$$

Atsakymas. -1.

4. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 3 cm ir 4 cm. Per trumpesniojo statinio ir įžambinės vidurio taškus nubrėžtas apskritimas, liečiantis įžambinę. Raskite spindulio ilgį.

Sprendimas.



$AC = 3$ cm, $BC = 4$ cm. Pagal Pitagoro teoremą $AB = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm.

D, F ir E yra atitinkamai įžambinės AB, statinio AC ir atkarpos DF vidurio taškai, $OD \perp AB$, $OE \perp DF$, O – apskritimo centras.

$DE = \frac{DF}{2} = \frac{BC}{4} = 1$ cm.

$\triangle DEO \sim \triangle ACB$, vadinasi, $\frac{DO}{AB} = \frac{DE}{AC}$. Iš to gauname, kad $DO = \frac{DE \cdot AB}{AC} = \frac{1 \cdot 5}{3} = \frac{5}{3}$ (cm).

Atsakymas. $\frac{5}{3}$ cm.

5. Daugiabučio namo renovacijai pritarė nuo $85,8\%$ iki $88,5\%$ gyventojų. Raskite mažiausią įmanomą to namo gyventojų skaičių.

Sprendimas. Pažymėkime N – namo gyventojų skaičių, x – pasisakiusių prieš renovaciją gyventojų skaičių.

Vadinasi, $11,5\% < x < 14,2\%$. Tada

$$\frac{11,5}{100}N < x < \frac{14,2}{100}N$$

$$\frac{115N}{1000} < x < \frac{142N}{1000}$$

$$\frac{1000}{142N} < \frac{1}{x} < \frac{1000}{115N} \;\Bigg|\; \cdot xN > 0$$

$$\frac{1000}{142}x < N < \frac{1000}{115}x.$$

Kai $x = 1$, gauname $7,042 < N < 8,696$. Vadinasi, mažiausias įmanomas to namo gyventojų skaičius $N = 8$.

Atsakymas. 8 gyventojai.

6. Raskite sumą (kai $n > k$)

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Sprendimas. Kadangi

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

tai

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{(k+2)} = \frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2-k}{k(k+2)} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right).
\end{aligned}$$

Analogiškai

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+3}\right);$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Todėl

$$S = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{2}{i+1} + \frac{1}{i+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{n}\left(\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
2S &= \sum_{i=k}^{n}\left(\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\left(\frac{1}{i+2}-\frac{1}{i+1}\right)\right)= \\
&= \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+2}\right)+ \\
&\quad+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)+\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+3}\right)+\ldots+ \\
&\quad+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)= \\
&= \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{k+1-k}{k\,(k+1)}+\frac{n+1-n-2}{(n+1)\,(n+2)}\right)= \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k\,(k+1)}-\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\right)
\end{aligned}
$$

Atsakymas. $\frac{1}{2k(k+1)}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

7. Plaukiant turistams valtimi prieš srovę, taške A pro juos praplaukė srovės nešamas butelis. Paplaukę dar prieš srovę, turistai apsuko valtį grįžti. Po 10 minučių nuo posūkio jie pavijo butelį taške B už 1 km nuo taško A. Raskite upės tėkmės greitį, žinodami, kad pasroviui irklavo vienodai.

Sprendimas. Sakykime, kad valties greitis stovinčiame vandenyje yra x km/min, o valtis nuo taško A prieš srovę plaukė t min. Tada butelis plaukė $(10+t)$ min, jo (arba tėkmės) greitis $1/(10+t)$ km/min. Prieš srovę valties greitis $x-\frac{1}{10+t}$ km/min, o pasroviui $x+\frac{1}{10+t}$ km/min. Kelias prieš srovę 1 km trumpesnis už kelią pasroviui, todėl

$$\left(x-\frac{1}{10+t}\right)t+1=10\left(x+\frac{1}{10+t}\right),$$

$$xt+\frac{10}{10+t}=10x+\frac{10}{10+t}.$$

Iš čia $xt=10x$, tai $t=10$ min. Upės tėkmės greitis lygus $\frac{1}{10+t}=\frac{1}{20}$ km/min.

Pastaba. Galimi ir kitokie sprendimo būdai.

Atsakymas. 50 m/min.

8. Trikampio ABC kraštinėje AB atidėtas taškas Q, o kraštinėje AC atidėti taškai P ir R. Yra žinoma, kad $AB = AC, AP = PQ = QR = RB = BC$. Raskite trikampio ABC kampą A.

Sprendimas.

Tarkime, kad $\angle A = \alpha$. Kadangi $AP = PQ$, tai $\angle AQP = \angle A = \alpha$, vadinasi, $\angle APQ = 180° - 2\alpha$. Tada $\angle QPR = 2\alpha$. Kadangi $PQ = QR$, tai $\angle QRP = \angle QPR = 2\alpha$, vadinasi, $\angle PQR = 180° - 4\alpha$. Tada $\angle RQB = 180° - (180° - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$. Analogiškai gauname, kad $\angle QRB = 180° - 6\alpha$, o $\angle CRB = \angle RCB = 4\alpha$. Vadinasi, trikampio ABC $\angle C = \angle B = 4\alpha$. Taigi gauname

$$4\alpha + 4\alpha + \alpha = 180° \;\Rightarrow\; \alpha = 20°.$$

Atsakymas. $20°$.

9. Trys draugai atvyko į viešbutį ir paprašė į kambarį atnešti pyragaičių. Belaukdami jie užmigo. Pirmasis prabudęs suvalgė trečdalį pyragaičių ir vėl užmigo. Prabudęs antrasis taip pat suvalgė trečdalį visų likusių pyragaičių ir vėl užmigo. Trečiasis pasielgė analogiškai. Kai visi atsibudo, ant stalo buvo 8 pyragaičiai. Po kiek likusių pyragaičių dar priklauso kiekvienam draugui?

Sprendimas. Tarkime, kad pyragaičių buvo x. Pirmajam suvalgius trečdalį, jų liko $\frac{2}{3}x$. Antrajam suvalgius trečdalį likusių pyragaičių, jų liko $\frac{4}{9}x$. Trečiajam draugui suvalgius trečdalį visų likusių pyragaičių, liko $\frac{8}{27}x = 8$ pyragaičiai. Vadinasi, $x = 27$ ir kiekvienam draugui priklauso po 9 pyragaičius.

Taigi, pirmasis draugas suvalgė $\frac{1}{3} \cdot 27 = 9$, todėl jam pyragaičių nebepriklauso. Antrasis suvalgė $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 27 = 6$, todėl jam priklauso dar 3 pyragaičiai. Trečiasis suvalgė $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot 27 = 4$, todėl jam priklauso dar 5 pyragaičiai.

Atsakymas. $0, 3$ ir 5.

10. Įrašykite trūkstamą skaičių X, kai $n < 10, n \in N$. Paaiškinkite pasirinkimą.

10	12	15	20
40	50	65	X

Sprendimas. Jei $n \neq 5$. dėsningumo nėra.

Kai $n = 5$: $5 \cdot 10 = 50$, t.y. 10 vienetų didesnis nei 40; $5 \cdot 12 = 60$, t.y. 10 vienetų didesnis nei 50; $5 \cdot 15 = 75$, t.y. 10 vienetų didesnis nei 65; $5 \cdot 20 = 100$, t.y. 10 vienetų didesnis nei 90.

Atsakymas. 90.

Pastaba. Kiekvienas uždavinys vertinamas 4 taškais.

Vertinimo komisijos pirmininkė
doc. dr. Karolina Piaseckienė