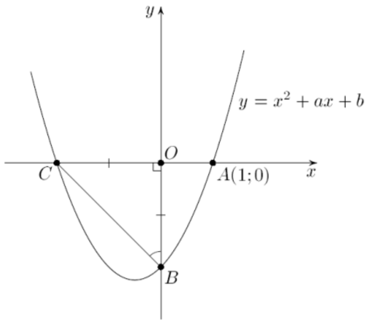
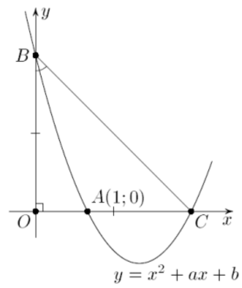
Jaunųjų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti
2017 m. spalio 30 d., Kretingos Jurgio Pabrėžos universitetinė gimnazija
III-IV klasės

Uždavinių sprendimai

1. Funkcijos $y = x^2 + ax + b$ grafikas kerta abscisių ašį taškuose A ir C, o ordinačių ašį taške B. Taško A koordinatės yra $A(1;0)$. Raskite kampo CBO didumą, jeigu O - koordinačių pradžios taškas.

Sprendimas. Funkcijos $y = x^2 + ax + b$ grafikas yra parabolė, kurios šakos eina į viršų. Be to taškas B gali būti aukščiau abscisių ašies arba žemiau abscisių ašies (žr. brėžinius). Tegul x_1 ir x_2 - taškų, kuriuose funkcijos grafikas kerta x-ų ašį, abscisės. Be to, $x_1 = 1$. Tuomet, pagal Vietos teoremą, $x_2 = b$, arba $OC = b$. Iš kitos pusės, $y(0) = b$, arba $OB = b$. Vadinasi statusis trikampis COB yra lygiašonis. Todėl, $\angle CBO = 45^\circ$. Pastebime, kad sprendimas nepriklauso nuo taško B padėties.





Atsakymas: 45°

2. Grybas yra vadinamas „blogu", jeigu jame yra ne mažiau kaip 10 kirmėlių. Krepšyje yra 90 „blogų" ir 10 „gerų" grybų. Ar gali visi grybai tapti „gerais", jeigu kai kurios kirmėlės iš „blogų" grybų peršliauš į „gerus"?

Sprendimas. Tarkime, kad kiekviename „blogame" grybe yra lygiai 10 kirmėlių, o kiekviename „gerame" kirmėlių nėra. Jeigu iš kiekvieno „blogo" grybo po vieną kirmėlę peršliauš į gerus, gali atsitikti taip, kad visuose grybuose bus po 9 kirmėles, t.y., visi grybai bus „geri".

Atsakymas: Gali.

3. Prie natūraliojo skaičiaus N pridėję didžiausiąjį, bet mažesnį už N, jo daliklį gauname dešimties natūralųjį laipsnį. Raskite visus tokius skaičius N.

Sprendimas. Tegul m - skaičiaus N didžiausiasis daliklis, bet mažesnis už N. Tuomet $N = mp$, o p yra mažiausias skaičiaus N pirminis daliklis. Kadangi $N + m = 10^k, k \in \mathbb{N}$, tai $m(p+1) = 10^k$. Akivaizdu, jog $p > 2$, nes pastarosios lygybės dešinioji pusė nesidalija iš 3. Iš čia seka, kad N ir m - nelyginiai skaičiai. Kadangi 10^k dalijasi iš m, tai $m = 5^s$. Jeigu $m = 1$, tai $N = p = 10^k - 1$. Tačiau, taip būti negali, nes $10^k - 1$ dalijasi iš 9, t.y., nėra pirminis. Reiškia $s \geq 1$ ir, kadangi skaičius N dalijasi iš 5, $p \leq 5$. Jeigu $p = 3$, tai gauname $4 \cdot 5^s = 10^k$, arba $k = 2$, $m = 25$ ir $N = 75$. Jeigu $p = 5$, tai $p + 1 = 6$, o tai reiškia, kad skaičius 10^k dalijasi iš 3, ko būti negali.

Atsakymas: 75.

4. Raskite visas poras skaičių $(p;q)$, kad lygtys $x^2 - px + q = 0$ ir $x^2 - qx + p = 0$ turėtų dvi skirtingas natūraliąsias šaknis.

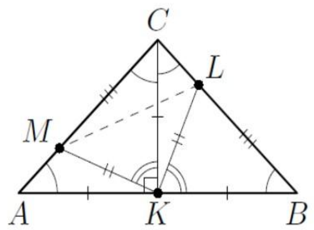
Sprendimas. Tegul x_1 ir x_2 yra pirmosios lygties šaknys, o y_1 ir y_2 yra antrosios lygties šaknys. Pagal Vietos teoremą gauname, kad $\begin{cases} x_1 + x_2 = p, \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$ ir $\begin{cases} y_1 + y_2 = q, \\ y_1 y_2 = p, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 y_2, \\ y_1 + y_2 = x_1 x_2. \end{cases}$ Sudėję šias lygtis turime, jog $x_1 x_2 - x_1 - x_2 + y_1 y_2 - y_1 - y_2 = 0$. Pertvarkę šią lygtį gauname, kad $(x_1 x_2 - x_1 - x_2) +$

$(y_1y_2 - y_1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1) + (y_1y_2 - y_1 - y_2 + 1) = 2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 2.$ Kadangi, pagal uždavinio sąlygą, skaičiai x_1, x_2 ir y_1, y_2 yra natūralieji, tai gautos lygties kairė pusė yra dviejų sveikųjų neneigiamų skaičių suma. O tai reiškia, kad kairės lygties pusės abu dėmenys yra lygūs 1, arba vienas iš jų yra lygus 2, o kitas - 0. Pirmuoju atveju, kai abu dėmenys lygūs 1, gauname prieštaravimą teoremos sąlygai, t.y., $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 2.$ Jeigu pirmasis dėmuo lygus 2, tai $x_1 = 2$, o $x_2 = 3$ (arba atvirkščiai). Iš čia, $\begin{cases} y_1 + y_2 = 6, \\ y_1y_2 = 5, \end{cases}$ arba $y_1 = 5$, o $y_2 = 1$ (arba atvirkščiai). Gauname, kad $p = 5$, o $q = 6$. Kai antrasis dėmuo lygus 2, sprendimas yra analogiškas ir gauname, kad $p = 6$, o $q = 5$.

Atsakymas: $(5; 6)$ arba $(6; 5)$.

5. Taškas *K* yra stačiojo lygiašonio trikampio *ABC* įžambinės *AB* vidurio taškas. Statiniuose *BC* ir *AC* pažymėti taškai *L* ir *M* taip, kad *BL=CM*. Ar trikampis *LMK* taip pat yra statusis lygiašonis?

Sprendimas. Stačiojo lygiašonio trikampio *ABC* pusiaukraštinė *CK* yra taip pat ir pusiaukampinė, ir aukštinė. Todėl $\angle KBC = \angle KCB = \angle KCA = 45°$. Iš čia *KC=KB*, o tai reiškia, kad trikampiai *KBL* ir *KCM* lygūs (*KC=KB*, *BL=CM*, $\angle KBL = \angle KCM$). Vadinasi *KL=KM*. Iš lygybės $\angle KBL = \angle CKM$, gauname, kad $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM = \angle LKC + \angle BKL = \angle BKC = 90°$. Vadinasi trikampis *LMK* yra statusis lygiašonis.



Atsakymas: Taip.

6. Pirmasis sekos narys yra lygus 934. Kiekvienas sekantis narys yra lygus prieš tai buvusio sekos nario skaitmenų sumai padaugintai iš 13. Raskite 2017-ąjį sekos narį.

Sprendimas. Raskime keletą pirmųjų sekos narių: $a_1 = 934$, $a_2 = (9 + 3 + 4) \cdot 13 = 208$, $a_3 = 10 \cdot 13 = 130$, $a_4 = 4 \cdot 13 = 52$, $a_5 = 7 \cdot 13 = 91$, $a_6 = 10 \cdot 13 = 130$. Kadangi kiekvieno sekančio sekos nario didumas priklauso tik nuo prieš tai buvusio nario, tai toliau sekos nariai kas 3 kartosis. Kadangi $2017 = 672 \cdot 3 + 1$, tai $a_{2017} = a_4 = 52$.

Atsakymas: 52.

7. Išspręskite lygtį $\left(\frac{7}{2\cdot9} + \frac{7}{9\cdot16} + \frac{7}{16\cdot23} + \frac{7}{23\cdot30} + \frac{7}{30\cdot37} + \frac{7}{37\cdot44} + \frac{7}{44\cdot51} + \frac{7}{51\cdot58}\right) \cdot x = 70$.

Sprendimas. Kadangi $\frac{7}{2\cdot9} + \frac{7}{9\cdot16} + \frac{7}{16\cdot23} + \frac{7}{23\cdot30} + \frac{7}{30\cdot37} + \frac{7}{37\cdot44} + \frac{7}{44\cdot51} + \frac{7}{51\cdot58} = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{23} + {} + \frac{1}{23} - \frac{1}{30} + \frac{1}{30} - \frac{1}{37} + \frac{1}{37} - \frac{1}{44} + \frac{1}{44} - \frac{1}{51} + \frac{1}{51} - \frac{1}{58} = \frac{1}{2} - \frac{1}{58} = \frac{14}{29}$, tai tuomet $\frac{14}{29} \cdot x = 70$, arba $x = 145$.

Atsakymas: $x = 145$.

8. Skaičiai *a, b, c* tokie, kad reiškinių $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ ir $\frac{c+b}{a}$ reikšmės yra lygios. Kam gali būti lygi šios reikšmės? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Prie kiekvieno reiškinio pridėję po 1 turime $\frac{a+b+c}{c}$, $\frac{a+b+c}{b}$ ir $\frac{a+b+c}{a}$. Iš čia gauname, kad arba $a+b+c=0$, arba $a=b=c$. Jei $a+b+c=0$, tai kiekvienas duotas reiškinys lygus -1. Jei $a=b=c$, tai kiekvienas reiškinys lygus 2.

Atsakymas: -1 arba 2.

9. **Išspręskite lygtį** $f(f(f(f(f(x)))))=0$, **jei žinoma, kad** $f(x)=x^2+16x+56$.

Sprendimas. Pertvarkę *f(x)*, gauname, kad $f(x)=x^2+16x+56=(x+8)^2-8$. Matome, kad

$$f(f(f(f(f(x)))))=(x+8)^{32}-8.$$

Iš čia $(x+8)^{32}-8=0$ arba $x=-8\pm\sqrt[32]{8}$.

Atsakymas: $x=-8\pm\sqrt[32]{8}$.

10. Raskite natūraliuosius lygčių sistemos $\begin{cases} x^2+5y^2+4z^2+4xy+4yz=125, \\ x^2+3y^2-4z^2+4xy-4yz=75 \end{cases}$ **sprendinius.**

Sprendimas. Sudėję šios sistemos abi lygtis gauname, kad $2x^2+8y^2+8xy=200$, arba $(x+2y)^2=100$. Todėl $x+2y=10$. $x+2y=-10$ netinka, nes pagal sąlygą $x>0, y>0$. Iš pirmos lygties atėmę antrąją lygtį gauname, kad $2y^2+8z^2+8yz=50$, arba $(y+2z)^2=25$. Todėl $y+2z=5$. $y+2z=-5$ netinka, nes $y>0, z>0$. Vadinasi, $\begin{cases} x+2y=10, \\ y+2z=5. \end{cases}$ Iš antros lygties gauname, kad $y=5-2z$. Kadangi *y* ir *z* yra natūralieji skaičiai, tai *z* gali įgyti tik dvi reikšmes: $z=1$, arba $z=2$. Jei $z=1$, tai $y=3$, o $x=4$. Jei $z=2$, tai $y=1$, o $x=8$.

Atsakymas: $x=8,\ y=1,\ z=2,$ arba $x=4,\ y=3,\ z=1.$