

Jaunujų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

III-IV klasės

2017 m. spalio 30 d. Kretingos Jurgio Pabrėžos universitetinė gimnazija

Užduotys

1. Funkcijos $y = x^2 + ax + b$ grafikas kerta abscisių ašį taškuose A ir C , o ordinačių ašį taške B . Taško A koordinatės yra $A(1; 0)$. Raskite kampo CBO didumą, jeigu O - koordinatinių pradžių taškas.
2. Grybas yra vadinamas „blogu“, jeigu jame yra ne mažiau kaip 10 kirmėlių. Krepšyje yra 90 „blogų“ ir 10 „gerų“ grybų. Ar gali visi grybai tapti „gerais“, jeigu kai kurios kirmėlės iš „blogų“ grybų peršliauš į „gerus“?
3. Prie natūraliojo skaičiaus N pridėję didžiausiąjį, bet mažesnę už N , jo daliklį gauname dešimties natūralųjį laipsnį. Raskite visus tokius skaičius N .
4. Raskite visas poras skaičių $(p; q)$, kad lygtys $x^2 - px + q = 0$ ir $x^2 - qx + p = 0$ turėtų dvi skirtingas natūraliąsias šaknis.
5. Taškas K yra stačiojo lygiašonio trikampio ABC įžambinės AB vidurio taškas. Statiniuose BC ir AC pažymėti taškai L ir M taip, kad $BL=CM$. Ar trikampis LMK taip pat yra statusis lygiašonis?
6. Pirmasis sekos narys yra lygus 934. Kiekvienas sekantis narys yra lygus prieš tai buvusio sekos nario skaitmenų sumai padaugintai iš 13. Raskite 2017-ąjį sekos narį.
7. Išspręskite lygtį $\left(\frac{7}{2 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{7}{16 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30} + \frac{7}{30 \cdot 37} + \frac{7}{37 \cdot 44} + \frac{7}{44 \cdot 51} + \frac{7}{51 \cdot 58}\right) \cdot x = 70$.
8. Skaičiai a, b, c tokie, kad reiškiniai $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ ir $\frac{c+b}{a}$ reikšmės yra lygios. Kam gali būti lygi šios reikšmės? Atsakymą pagrįskite.
9. Išspręskite lygtį $f(f(f(f(f(x)))))) = 0$, jei žinoma, kad $f(x) = x^2 + 16x + 56$.
10. Raskite natūraliuosius lygčių sistemos
$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy + 4yz = 125, \\ x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4xy - 4yz = 75 \end{cases}$$
 sprendinius.