XVIII Komandinė jaunųjų matematikų olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti

VšĮ Pranciškonų gimnazija,
Kretinga, 2019-10-29

9–10 vidurinių mokyklų (1–2 gimnazijų) klasių uždaviniai ir jų sprendimai

Pastaba. Kiekvienas uždavinys vertinamas 4 taškais.

1. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $\frac{n^2+n+6}{n+1}$ įgyja sveikąsias reikšmes.

Sprendimas.

$$\frac{n^2+n+6}{n+1} = \frac{n(n+1)+6}{n+1} = n + \frac{6}{n+1}.$$

Reiškinys įgyja sveikąsias reikšmes, kai $\frac{6}{n+1}$ yra sveikasis skaičius, t. y., kai $n+1$ ($n \in N$) yra 6 daliklis. Belieka patikrinti visus šešeto daliklius: 1, 2, 3, 6.

$n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$ – netinka pagal sąlygą; $n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$;
$n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$; $n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$.

Atsakymas. 1; 2; 5.

2. Klasėje yra 21 mokinys, lankantis informatikos arba matematikos būrelius. Abu būrelius lanko 5 mokiniai, o matematikos būrelį lanko 14 mokinių. Kiek mokinių lanko informatikos būrelį?

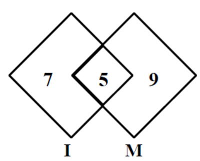
Sprendimas. Pažymėkime: $A = \{$lanko matematikos būrelį$\}$, $B = \{$lanko informatikos būrelį$\}$; $m(*)$ – mokinių skaičius.

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

$$21 = 14 + m(B) - 5,$$

$$m(B) = 21 - 14 + 5 = 12.$$

Arba



Atsakymas. 12.

3. Raskite skaičiaus $10^{2019}+29^{2019}$ paskutinį skaitmenį.

Sprendimas. Skaičių keliant bet kokiu laipsniu rezultato paskutinis skaitmuo priklauso nuo pradinio skaičiaus paskutinio skaitmens. 10 keliant bet kokiu laipsniu paskutinis skaitmuo bus 0. 29 keliant laipsniu rezultato paskutiniai skaitmenys gali būti du: 1 arba 9 (tiksliau, 9 arba 1). Kadangi $2019=2\cdot 1009+1$, tai skaičiaus 29^{2019} paskutinis skaitmuo bus 9. Vadinasi, skaičiaus $10^{2019}+29^{2019}$ paskutinis skaitmuo $0+9=9$.

Atsakymas. 9.

4. Suprastinkite reiškinį

$$\left(\left(\frac{y}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}.$$

Sprendimas.

$$\left(\left(\frac{y}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}=$$

$$\begin{aligned}
&=\left(\frac{(y-x)^2}{y^2}-\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{x(x-y)}\right)\cdot\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=\\
&=\frac{(y^2-2xy+x^2)(x^2-xy)-(x^2-2xy+y^2)y^2}{xy^2(x-y)}\cdot\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=\\
&=\frac{(x^2-2xy+y^2)(x^2-xy-y^2)}{y^2(x-y)}\cdot\frac{x^3}{y^2(x^2-y^2)}=\\
&=\frac{(x-y)^2(x^2-xy-y^2)}{y^2(x-y)}\cdot\frac{x^3}{y^2(x-y)(x+y)}=\\
&=\frac{x^3(x^2-xy-y^2)}{y^4(x+y)}.
\end{aligned}$$

Atsakymas. $\frac{x^3\left(x^2-xy-y^2\right)}{y^4(x+y)}$.

5. Dviejų skaičių suma lygi 15, o jų aritmetinis vidurkis 25% didesnis už geometrinį vidurkį. Raskite tuos skaičius.

Sprendimas. Tarkime, kad pirmasis skaičius – x, o antrasis – y. Tada

$$\begin{cases} x+y=15,\\ \frac{x+y}{2}=1,25\sqrt{xy}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=15,\\ x+y=2,5\sqrt{xy}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=15,\\ 2,5\sqrt{xy}=15; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=15,\\ \sqrt{xy}=6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=15,\\ xy=36; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15-y,\\ (15-y)y=36; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=15-y,\\ y^2-15y+36=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12,\\ y=3; \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} x=3,\\ y=12. \end{cases}$$

Atsakymas. 3 ir 12.

6. Funkcija f tokia, kad su bet kokiomis teigiamomis x ir y reikšmėmis yra teisinga lygybė $f(xy) = f(x) - f(y) + 1$. Raskite $f(2019)$, jei $f\left(\frac{1}{2019}\right) = 1$.

Sprendimas. Kai $y = 1$, duotoji lygybė bus tokia: $f(x) = f(x) - f(1) + 1$, vadinasi, $f(1) = 1$.

Tegu $x = 2019$, $y = \frac{1}{2019}$. Tada $f\left(2019 \cdot \frac{1}{2019}\right) = f(2019) - f\left(\frac{1}{2019}\right) + 1$, t. y.

$$f(1) = f(2019) - f\left(\frac{1}{2019}\right) + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = f(2019) - f\left(\frac{1}{2019}\right) + 1 \quad \Rightarrow$$

$$f(2019) = f\left(\frac{1}{2019}\right) \quad \Rightarrow \quad f(2019) = 1.$$

Atsakymas. 1.

7. Pavaroje yra sujungti du skirtingo dydžio krumpliaračiai. Pirmasis ratas turi 12 dantų, o antrasis – 54. Kiek kartų turės apsisukti kiekvienas ratas, kol abu ratai grįš į pradinę padėtį?

Sprendimas. Vienas pirmojo krumpliaračio dantis pasuka ratą $\frac{1}{12}$-ąja jo pilno apsisukimo dalimi, o vienas antrojo krumpliaračio dantis – $\frac{1}{54}$-ąja jo pilno apsisukimo dalimi. Pirmajam krumpliaračiui pilnai apsisukus, antrasis pasisuka $\frac{12}{54}$ pilno apsisukimo.

Tarkime, kad iki grįžimo į pradinę padėtį pirmasis krumpliaratis turės apsisukti x kartų. Tada antrasis krumpliaratis apsisuks $\frac{12x}{54}$ kartų. Apsisukimų skaičius $\frac{12x}{54} = \frac{2x}{9}$ turi būti sveikasis, todėl x turi būti 9 kartotinis. Mažiausia x reikšmė, dali iš 9, yra $x = 9$, todėl $\frac{2x}{9} = 2$.

Vadinasi, abu ratai grįš į pradinę padėtį po to, kai pirmasis ratas apsisuks 9 kartus, o antrasis ratas – 2 kartus.

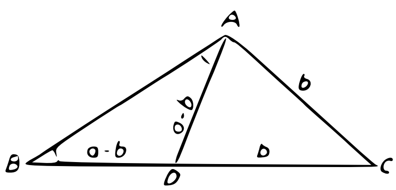
Atsakymas. 9 ir 2.

8. Kaip nubrėžti trikampį, kai duotos kraštinės a, b ir žinoma, kad kampas A trigubai didesnis už kampą B?

Sprendimas. Sakykime, kad reikia nubrėžti $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle BAC = 3\angle B$, $\angle BAD = \angle B$. Tada $\angle CAD = \angle CDA = 2\angle B$, todėl $CD = AC = b$ ir $AD = BD = a - b$.

Brėžiame $\triangle ACD$, $AC = CD = b$, $AD = a - b$. Atkarpos CD tęsinyje atidedame atkarpą $DB = a - b$. Gauname $\triangle ABC$.

Kai $b < a < 3b$, tai yra vienintelis sprendinys; kitais atvejais sprendinių nėra.



9. Iš miesto A į miestą B, esantį už 120 km, mopedu išvyko kurjeris. Po 1 valandos iš miesto A motociklu išvažiavo antras kurjeris, kuris, pasivijęs pirmąjį ir perdavęs jam siuntinį, nedelsdamas tuo pačiu greičiu pajudėjo atgal ir grįžo į miestą A tuo pačiu momentu, kai pirmasis kurjeris pasiekė miestą B. Koks pirmojo kurjerio greitis, jeigu antrojo greitis – 50 km/h?

Sprendimas. Tegu v_1 – pirmojo kurjerio greitis, $v_2 = 50$ km/h – antrojo kurjerio greitis, o s – atstumas, kurį nuvažiavo abu kurjeriai iki jų susitikimo momento. Tada s km atstumui įveikti pirmasis kurjeris sugaišo $\frac{s}{v_1}$ h, o antrasis – $\frac{s}{v_2}$ h, arba viena valanda trumpiau nei pirmasis, t. y. $\frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_2} + 1$.

Po susitikimo pirmasis kurjeris nuvažiavo $(120 - s)$ km, o antrasis per tą patį laiką vėl s km. Taigi, $\frac{120-s}{v_1} = \frac{s}{v_2}$.

Norėdami rasti pirmojo kurjerio greitį v_1 sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{s}{v_1} = \frac{s}{50} + 1 \\ \frac{120-s}{v_1} = \frac{s}{50} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50s = sv_1 + 50v_1 \\ 6000 - 50s = sv_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{50v_1}{50-v_1} \\ 6000 - 50 \cdot \frac{50v_1}{50-v_1} = \frac{50v_1}{50-v_1} \cdot v_1. \end{cases}$$

Sprendžiame antrąją sistemos lygtį:

$$120 - \frac{50v_1}{50 - v_1} - \frac{v_1^2}{50 - v_1} = 0 \Rightarrow 6000 - 120v_1 - 50v_1 - v_1^2 = 0 \Rightarrow v_1^2 + 170v_1 - 6000 = 0 \Rightarrow$$

$$v_1 = -200 \text{ (netinka pagal sąlygą) arba } v_1 = 30.$$

Atsakymas. 30 km/h.

10. Iš mokytojų kambario dingo vienos mokytojos mobilusis telefonas. Į mokytojų kambarį, nepriklausomai vienas nuo kito, buvo užėję trys mokiniai: pirmūnas, didžiausias mokyklos neklaužada ir niekuo neišsiskiriantis mokinys. Buvo aišku, kad telefoną paėmė kuris nors vienas iš jų (Vidmantas, Skirmantas arba Regimantas), bet nė vienas iš jų neprisipažino.

Vidmantas: Skirmantas to nepadarė. Tai padarė Regimantas.

Skirmantas: Aš to nepadariau. Vidmantas to nepadarė.

Regimantas: Aš to nepadariau. Tai padarė Skirmantas.

Vėliau paaiškėjo, kad pirmūno abu atsakymai teisingi, neklaužada abu kartus sumelavo, o niekuo neišsiskiriantis mokinys vieną kartą sumelavo, o kitą kartą pasakė tiesą.

Nustatykite pirmūno, neklaužados ir niekuo neišsiskiriančio mokinio vardus ir pasakykite, kuris iš jų paėmė mokytojos mobilųjį telefoną.

Sprendimas. Tarkime, kad telefoną paėmė Vidmantas. Tada išeina, kad visi trys mokiniai vieną kartą sakė tiesą, o antrą kartą melavo. Tai neatitinka sąlygos.

Tarkime, kad telefoną paėmė Skirmantas. Tada pirmasis Skirmanto teiginys yra melas, o antrasis teisingas. Iš to seka, kad Vidmantas abu kartus sumelavo, o Regimantas abu kartus pasakė tiesą.

Tarus, kad telefoną paėmė Regimantas, išeina, jog jis sumelavo abu kartus, o kiti du mokiniai abu kartus sakė tiesą. Tai neatitinka sąlygos.

Nustačius, kad telefoną paėmė Skirmantas, paaiškėja, kad jis – niekuo neišsiskiriantis mokinys, Vidmantas – didžiausias mokyklos neklaužada, o Regimantas – pirmūnas.

Atsakymas. Regimantas – pirmūnas, Vidmantas – neklaužada, Skirmantas – niekuo neišsiskiriantis mokinys, kuris paėmė mobilųjį telefoną.

Pastaba. Galimi ir kitokie uždavinių sprendimo būdai.

Vertinimo komisijos pirmininkė
doc. dr. Karolina Kanišauskienė