Jaunųjų matematikų komandinė olimpiada prof. V. Liutiko prizui laimėti
2019 m. spalio 29 d.
III-IV klasės

Uždavinių sprendimai

1. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2+x+y^2+y=4, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-2. \end{cases}$

Sprendimas.

Akivaizdu, kad x ir y nelygūs 0. Subendravardiklinę antrąją lygybę gauname, kad $x+y=-2xy$. Pirmoje lygybėje vietoje $x+y$ įrašę $-2xy$ gauname, kad $(x-y)^2=4$. Galimi du atvejai:

1) $\begin{cases} x-y=2, \\ 2xy+x+y=0. \end{cases}$ Iš pirmosios lygties turime, kad $y=x-2$. Gautąją išraišką įrašę į antrąją lygtį ir atskliaudę gauname kvadratinę lygtį $x^2-x-1=0$, kurios šaknys yra $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Tuomet $y=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

2) $\begin{cases} x-y=-2, \\ 2xy+x+y=0. \end{cases}$ Pirmąją lygtį užrašę $y-x=2$, gauname tą pačią sistemą, tik x ir y sukeisti vietomis.

Atsakymas: $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$

2. Iki rekonstrukcijos gamykloje veikė tam tikras skaičius vienodų konvejerių, kurių bendra mėnesinė produkcija buvo 15000 detalių. Po rekonstrukcijos, sumontavus dar penkis konvejerius ir padidinus visų konvejerių pajėgumą, mėnesinė produkcija padidėjo iki 33792 detalių. Kiek konvejerių buvo iš pradžių?
Sprendimas.

Pažymėkime pradinį konvejerių skaičių x, pradinį konvejerio pajėgumą a detalių per mėnesį, padidėjusį konvejerio pajėgumą b. Žinoma, sąlyga reikia suprasti taip, kad kiekvienas konvejeris per mėnesį pagamina sveiką detalių skaičių. Taigi pagal sąlygą

$xa=15000,\ (x+5)b=33792,\ a<b,\ x\in N, a\in N,\ b\in N$.

Matome, kad 15000= $2^3\cdot3\cdot5^4$ turi dalytis iš x. Bet x negali dalytis iš 5, nes tada antros lygties kairė pusė dalytųsi iš 5, o dešinė – ne. Todėl $2^3\cdot3=24$ turi dalytis iš x, vadinasi x, gali įgyti reikšmes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, o tada $x+5$ atitinkamai įgyja reikšmes 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 29. bet 33792= $2^{10}\cdot3\cdot11$ turi dalytis iš $x+5$, todėl tinka tik reikšmės $x=1,3,6$.

Rašome x reikšmes, su kuriomis pajėgumai a ir b yra natūralieji skaičiai ir $a<b$: $a=\dfrac{15000}{x}$, $b=\dfrac{33792}{x+5}$, taigi turi būti

$\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5^4}{x} < \frac{2^{10} \cdot 3 \cdot 11}{x+5}$, $5^4(x+5) < 2^7 \cdot 11x$, $783x > 3125$.

Kadangi $x \in N$, nustatome, kad $x \geq 4$. Vadinasi, iš x reikšmių 1, 3, 6 sąlyga tenkina tik $x = 6$.

Atsakymas: 6 konvejeriai.

3. Raskite trapecijos *ABCD* kampus, jei *AD* - pagrindas, be to *AB* = *BC*, *AC* = *CD* ir *BC* + *CD* = *AD*.

Sprendimas.

Parenkame pagrindo AD tašką K taip, kad AK = BC. Tada KD = CD ir ABCK – rombas. Pažymėkime kampą CAK - α. Tuomet ∠ CAK = ∠ ACK = ∠ ADC = α ir ∠ CKD = ∠ KCD = 2 α. Trikampyje ACD: 5 α = 180, α = 36. Vadinasi, trapecijos kampai yra ∠ A = 72, ∠ B = 108, ∠ C = 144, ∠ D = 36.

Atsakymas: ∠ A = 72, ∠ B = 108, ∠ C = 144, ∠ D = 36.

4. Su kuriomis x ir y reikšmėmis teisinga lygybė

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}?$$

Sprendimas. Atskliaudę ir sutraukę panašius narius gauname, kad $x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4x^2 - 4xy + y^2) + \frac{3}{2}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x-y)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0, \\ y - \frac{2}{3} = 0. \end{cases}$ Iš antrosios lygybės randame, kad $y = \frac{2}{3}$. Tuomet, iš pirmosios lygybės randame, kad $x = \frac{1}{3}$.

Atsakymas: $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$.

5. Kvadrate 8 × 8 pažymėti 4 taškai. Ar tarp šių taškų yra bent 2 taškai, tarp kurių atstumas neviršija $\sqrt{65}$.

Sprendimas. Kvadratą 8×8 suskaidome į du stačiakampius 7×4 ir vieną stačiakampį 1×8. Pagal Pitagoro teoremą, didžiausias atstumas kiekviename stačiakampyje yra $\sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$. Iš keturių taškų, mažiausiai du pateks į tą patį stačiakampį. Todėl atstumas tarp tų taškų yra nedidesnis už $\sqrt{65}$.

Atsakymas: Taip.

6. Natūralieji skaičiai *x* ir *y* tenkina lygybę $x^2 - 3x = 25y^2 - 15y$. Kiek kartų *x* didesnis už *y*.

Sprendimas. Perrašome lygybę tokiu būdu: $x^2 - 3x - 25y^2 - 15y = 0$. Šios lygties kairiąją pusę išskaidome dauginamaisiais $x^2 - 3x - 25y^2 - 15y = (5y - x)(5y + x - 3) = 0$.

Kadangi *x* ir *y* natūralieji skaičiai, tai $x, y \geq 1$, arba $5y + x - 3 \geq 3$, t. y. $5y + x - 3 \neq 0$. Todėl $5y - x = 0$, arba $5y = x$.

Atsakymas: 5 kartus.

7. Išspręskite lygtį $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 5$.

Sprendimas: Jei $x^2-4\geq 0$, tai $x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Jei $x^2-9\geq 0$, tai $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. Nagrinėkime tokius atvejus:

1. $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$. Tuomet $(x^2-4)+(x^2-9)=5 \Leftrightarrow x=\pm 3$. Tai reiškia, kad šiuo atveju sprendinių nėra;
2. $x\in[-3;-2)\cup(2;3]$. Tuomet $(x^2-4)+(9-x^2)=5 \Leftrightarrow 5=5$. Tai reiškia, kad bet kuris skaičius iš intervalo $[-3;-2)\cup(2;3]$ yra lygties sprendinys.
3. $x\in[-2;2]$. Tuomet $(4-x^2)+(9-x^2)=5 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Sujungę antrąjį ir trečiąjį atvejus gauname, kad lygties sprendinys yra bet kuris skaičius x iš intervalo $[-3;-2]\cup[2;3]$.

Atsakymas: $x\in[-3;-2]\cup[2;3]$.

8. Pirmasis sekos narys yra 7. Kiekvienas sekantis sekos narys yra prieš jį esančio sekos nario kvadrato skaitmenų suma padidinta vienetu. Raskite 2019-tąjį sekos narį.

Sprendimas. Raskime keletą pirmųjų sekos narių: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, … . Matome, kad sekos nariai, pradedant penktuoju, kas tris pasikartoja, t. y., sekos nariai, kurių numeris yra $3k-1$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, yra lygūs 5, sekos nariai, kurių numeris yra $3k$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, yra lygūs 8, o sekos nariai, kurių numeris yra $3k+1$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, yra lygūs 11. Kadangi 2019 dalijasi iš 3, tai 2019-tasis sekos narys yra 8.

Atsakymas: 8.

9. Kam lygi suma $\frac{1}{2^{-100}+1}+\frac{1}{2^{-99}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{99}+1}+\frac{1}{2^{100}+1}$**?**

Sprendimas. Kadangi, bet kokiems *x* ir *n* $\frac{1}{x^{-n}+1}+\frac{1}{x^{n}+1}=1$, tai

$$\left(\frac{1}{2^{-100}+1}+\frac{1}{2^{100}+1}\right)+\left(\frac{1}{2^{-99}+1}+\frac{1}{2^{99}+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{-1}+1}+\frac{1}{2^{1}+1}\right)+\frac{1}{2^{0}+1}=100,5$$

Atsakymas: 100,5.

10. Onutė sugalvojo natūralųjį skaičių *m*. Tuomet Petriukas prie vieno iš Onutės sugalvotojo skaičiaus daliklio *p* pridėjo 5 ir gautąją sumą padaugino iš 6. Iš skaičiaus *m* atėmęs gautąją sandaugą, Petriukas gavo 7. Kokį skaičių sugalvojo Onutė?

Sprendimas.

Petriukas atliko tokią veiksmų seką: $p\to p+5\to 6(p+5)\to m-6(p+5)$. Paskutinis reiškinys yra lygus 7. Gauname lygtį $m-6p=37$. Kadangi *p* yra *m* daliklis, tai šios lygties kairioji pusė dalijasi iš *p*. Vadinasi *p* yra ir skaičiaus 37 daliklis. Todėl *p*=1 arba *p*=37. Kadangi $m=6p+37$, tai *m*=43, arba *m*=259.

Atsakymas: 43 arba 259.